Zu der

öffentlichen Prüfung

der Schüler

des Gymnasiums zu Elbing,

welche

Donnerstag und Freitag den 11. und 12. October

Vormittags von 9 Uhr ab

in dem Saale der Anstalt

gehalten werden wird,

ladet ergebenst ein

Dr. Adolph Benecke,

Professor und Director des Gymnasiums.

INHALT.

Elbing, 1849.

Gedruckt bei F. W. Neumann-Hartmann.

Schulnachrichten.

I. Lehrverfassung.

SEXTA.

Ordinarius: Oberlehrer Scheibert.

Der Cursus einjährig. *Wöchentlich 32 Stunden.*

1. Deutsche Sprache. 4 St. w. Eintheilung, Biegung und Rechtschreibung der Wörter. Lehre vom einfachen Satze. Übungen im mündlichen und schriftlichen Vortrage. Oberlehrer *Scheibert.*

2. Lateinische Sprache. 10 St. w. Formenlehre nach der Vorschule zu den lateinischen Classikern von W. Scheele. Theil 1. Abtheilung 1. Von der zweiten Abtheilung wurde die erste Reihe der lateinischen und deutschen Übungsbeispiele von §. 1 bis §. 42 übersetzt. Oberlehrer *Scheibert.*

3. Religionslehre. 2 St. w. Die biblischen Geschichten des A. T. nach Preuss. Angemessene Bibelstellen, Liederverse, ausgewählte Kirchenlieder, und die 10 Gebote mit Luther's Erklärung wurden kurz erläutert und memorirt. *Lindenroth.*

4. Geographie. 2 St. w. Erdtheile, Meere, Meerbusen, Meerengen, Halbinseln, Inseln. Länder von Europa mit ihren Begrenzungen, merkwürdigsten Gebirgen, Flüssen, Seen und Städten. Deutschland nach Höhenzügen und Flussgebieten im Allgemeinen nebst Ländern und Hauptstädten, der Preussische Staat genauer, die Provinz Preussen speciell. Oberlehrer *Scheibert.*

5. Geschichte. 2 St. w. Die ältesten Geschichten der Inder, Ägypter, Hebräer, Phönicier, Assyrier, Babylonier, Meder und Perser bis zum Tode des Cyrus. *Lindenroth.*

6. Arithmetik. 4 St. w. Das Numeriren. Die 4 Species in unbenannten und benannten Zahlen. Verhältnissrechnung. Die Anfangsgründe von den Brüchen. Kopf- und Zifferrechnen nach Fölsing's Rechenbuch. Th. 1. *Lindenroth.*

7. Naturgeschichte. 2 St. w. Beschreibung vorgezeigter Naturkörper zur Übung im Auffassen und Beschreiben der an ihnen hervortretenden Merkmale. Oberlehrer *Scheibert.*

8. Kalligraphie. 2 St. w. Musikdirector *Döring.*

9. Zeichnen. 2 St. w. *Müller.*

10. Gesang. 2 St. w. Kenntniss der Noten und Intervalle, der gebräuchlichsten Ton- und Tactarten, der dynamischen Hauptgrade. Übung der Haupttöne, der Durtonleiter, leichter sprungweiser Fortschreitungen, einfacher Lieder und Choralmelodieen. Musikdirector *Döring.*

QUINTA.

Ordinarius: Oberlehrer Sahme.

Der Cursus einjährig. *Wöchentlich* 32 *Stunden.*

1. Deutsche Sprache. 4 St. w. Leseübungen. Declamation. Vortrag gelesener Abschnitte aus Ph. Wackernagel's Lesebuch Th. 1. — Orthographische und Stilübungen. — Gebrauch der Adverbien, Präpositionen und Conjunctionen. Der mehrfach bekleidete und zusammengesetzte Satz. *Lindenroth.*

2. Lateinische Sprache. 10 St. w. Davon 4 St. Formenlehre nach Putsche's lat. Grammatik nebst mündlicher und schriftlicher Einübung derselben. 6 St. Übersetzung aus Scheele's Vorschule Theil 2. Lehrgang 1. Abschnitt 1. bis zum Schluss. Die Mustersätze und loci memoriales auswendig gelernt. Oberlehrer *Sahme.*

3. Religionslehre. 2 St. w. Die biblischen Geschichten des N. T. nach Preuss. Geeignete Bibelstellen, Liederverse, ausgewählte Kirchenlieder und die christlichen Glaubensartikel mit Luther's Erklärung wurden kurz erläutert und memorirt. *Lindenroth.*

4. Geographie. 2 St. w. Die Erde im Allgemeinen, die fünf Erdtheile nach Volger's Lehrbuch Cursus 2. Oberlehrer *Sahme.*

5. Geschichte. 2 St. w. Sagengeschichte der Griechen und Römer nach Schwab's Sagen des classischen Alterthums. Oberlehrer *Sahme.*

6. Arithmetik. 4 St. w. Die gemeinen und Decimalbrüche. Die Regeldetri und ihre Anwendung auf praktische Rechnungen nach Lindenroth's Leitfaden und Fölsing's Rechenbuch Theil 2. *Lindenroth.*

7. Naturgeschichte. 2 St. w. Im Winter Organographie; im Sommer Botanik. Oberlehrer *Scheibert.*

8. Kalligraphie. 2 St. w. Musikdirector *Döring.*

9. Zeichnen. 2 St. w. *Müller.*

10. Gesang. 2 St. w. Aufstellung aller Dur- und Molltonarten und der wesentlichsten Begriffe aus der Rhythmik und Dynamik. Geübt wurden schwierigere Fortschreitungen, Lieder, Choralmelodieen und Chöre. Musikdirector *Döring.*

QUARTA.

Ordinarius: Professor Richter.

Der Cursus einjährig. *Wöchentlich* 32 *Stunden.*

1. Deutsche Sprache. 3 St. w. Schriftliche Aufsätze im Anschluss an die historischen Vorträge. Declamationsübungen. Satzlehre nach Becker's Leitfaden. Dr. *Töppen.*

2. Lateinische Sprache. 6 St. w. Wiederholung und Erweiterung der Formenlehre nach Putsche. Einübung der Satzlehre nach Scheele's Vorschule Th. 2., aus welchem alle Sätze erster Reihe übersetzt und die Musterbeispiele gelernt wurden. Darauf Jacobs' lat. Lesebuch Band 2. Abtheilung 1. F. G. H. I. Abtheilung 2. Cap. II, 1—17. Phaedri fabb. lib. IV. Dr. *Töppen.*

3. Griechische Sprache. 6 St. w. Formenlehre nach Buttmann bis zu den Verbis auf $\overline{\mu\iota}$. H. Schmidt's und W. Wensch's Elementarbuch Curs. 1. Reihe 1. wurde nebst den entsprechenden Beispielen der 2. Abtheilung bis zu dem Abschnitt von den Verbis auf $\overline{\mu\iota}$ mündlich und schriftlich übersetzt. Dr. *Steinke.*

4. Religionslehre. 2 St. w. Erklärung der 3 ersten Hauptstücke des Lutherischen Katechismus. Auswendiglernen erläuterter Bibelstellen und Kirchenlieder. *Carl.*

5. Geographie. 2 St. w. Allgemeine Geographie. Europa. Nach Volger's Lehrbuch Curs. 2. Oberlehrer *Sahme.*

6. Geschichte. 2 St. w. Geschichte der Griechen bis auf Alexander. Dr. *Töppen.*

7. Mathematik. 3 St. w. Planimetrie nach Richter's Lehrbuche Abschnitt 1—6. — Decimalbrüche, Buchstabenrechnung, die Lehre von den Proportionen, von den Potenzen mit ganzen Exponenten, die Ausziehung der Quadratwurzel, die algebraischen Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Grösse. Professor *Richter.*

8. Naturgeschichte. 2 St. w. Naturgeschichte der höhern Pflanzen und Thiere. Oberlehrer *Scheibert.*

9. Kalligraphie. 2 St. w. *Lindenroth.*

10. Zeichnen. 2 St. w. *Müller.*

11. Gesang. (IV. und III. combinirt). 2 St. w. Wiederholung des Ton- und Noten-Systems; die noch übrigen Begriffe aus der Rhythmik und Dynamik, die musikalischen Nebenzeichen. Das Treffen leiterfremder Intervalle, die zweite Stimme der in Sexta und Quinta gesungenen Lieder, Choräle und Chöre. Dreistimmige in enger Harmonie gesetzte Lieder. Musikdirector *Döring.*

TERTIA.

Ordinarius: Professor Merz.

Der Cursus zweijährig. *Wöchentlich* 32 *Stunden.*

1. Deutsche Sprache. 3 St. w. Schriftliche Aufsätze nach gegebenen und besprochenen Dispositionen. Erläuterung der Grammatik und Stillehre nach Becker's Leitfaden. Metrik. Übungen im Declamiren und im freien Vortrage. Oberlehrer *Sahme.*

2. Lateinische Sprache. 8 St. w. Davon 6 St. w. Caes. de bell. Gall. lib. 1—4. mündlich und schriftlich übersetzt. Grammatik nach Putsche. Stil- und Memorirübungen. Professor *Merz.* — 2 St. w. Ovid. Metamorph. lib. VIII, IX, X mit Auswahl, XI, 1—220. Dr. *Steinke.*

3. Griechische Sprache. 6 St. w. Repetition der regelm. Conjugation und Einübung der unregelm. Verba. Darauf bezügliche Exercitia aus Schmidt u. Wensch Elementarbuch Curs. 1. Reihe 1. Übersetzt wurde Schmidt's Elementarb. Curs. 2. Hälfte 1 und Homer's Odyss. lib. IX. *Carl.*

4. Französische Sprache. 2 St. w. Elemente der Grammatik mündlich und schriftlich eingeübt. Ausgewählte Stücke aus Ideler's Handb. Th. 1. *Carl.*

5. Religionslehre. 2 St. w. Das 4. und 5. Hauptstück des Lutherischen Katechismus erläutert und memorirt. Lesung und Erklärung des Ev. Matthaei mit Vergleichung der andern Evangelien. *Carl.*

6. Geographie. 2 St. w. Die aussereuropäischen Länder. Darauf Preussen und Deutschland. Nach Volger's Lehrbuch Curs. 2. Oberlehrer *Sahme.*

7. Geschichte. 2 St. w. Geschichte von Preussen und Brandenburg bis zur Zeit der Reformation; vorausgeschickt wurde eine kürzere Übersicht der frühern Geschichte des Mittelalters. Dr. *Töppen.*

8. Mathematik. 3 St. w. Planimetrie nach Richter's Lehrbuche Abschnitt 7—10. Anwendung der Algebra auf die Geometrie. Anleitung zur Lösung geometrischer Aufgaben.

Die Lehre von den Potenzen und Wurzeln. Die algebraischen Gleichungen des 1. und 2. Grades. Professor *Richter.*

9. Naturgeschichte. 2 St. w. Im Winterhalbjahre Mineralogie, im Sommerhalbjahre Botanik nach Burmeister. *Lindenroth.*

10. Gesang. 2 St. w. Tertia mit Quarta combinirt. S. o. Musikdirector *Döring.*

SECUNDA.

Ordinarius: Professor Merz.

Der Cursus zweijährig. *Wöchentlich* 32 *Stunden.*

1. Deutsche Sprache. 3 St. w. Eine Reihe Klopstock'scher Oden und Schiller'scher Gedichte, Wieland's Oberon, Goethe's Hermann und Dorothea, Lessing's Nathan der Weise wurden erklärt. Deutsche Aufsätze, deren Themen meistens vorher ausführlich besprochen waren. Metrische Übungen. Declamation. Dr. *Töppen.*

2. Lateinische Sprache. 8 St. w. Davon 4 St. Liv. Hist. lib. IV., Cic. Cato Major. 2 St. Grammatik nach Zumpt §. 65 — 76, §. 81—84. Exercitia, Extemporalia, Beurtheilung der lateinischen Ausarbeitungen. Das Lateinsprechen wurde bei der Interpretation der Schriftsteller geübt. Dr. *Steinke.* — 2 St. Virgil. Aen. lib. IV. V. VI. Memorirübungen. Professor *Merz.*

3. Griechische Sprache. 6 St. w. Davon 2 St. Jacobs' Attica p. 123—176. pag. 227 — 271. — 2 St. Grammatik Buttm. Syntax §. 121—151. Wiederholung der Formenlehre. Mündliche und schriftliche Übungen aus Rost u. Wüstemann. Exercitia, Extemporalia, Orthographische Übb. Professor *Merz.* — 2 St. Homer. Odyss. IV. V. VI. VII. Director *Benecke.*

4. Französische Sprache. 2 St. w. Leichtere Regeln über die Syntax des Verbe nach Noël, Einübung der unregelmässigen Verba durch Extemporalien; Exercitien aus Tollin. Gelesen wurde Racine's Athalie. *Carl.*

5. Englische Sprache. 2 St. w. Elemente der Aussprache und Grammatik nach Smith; darauf leichte Extemporalien über die einfachern Regeln, und Exercitien aus Herrig's Aufgaben. Goldsmith's Vicar of Wakefield Ch. 16 — 21. *Carl.*

6. Religionswissenschaft. 2 St. w. Einleitung in das A. und N. T. nach Petri pag. 18—56. Das Evangelium Matthaei und der Brief an die Galater wurden in der Ursprache gelesen. Professor *Merz.*

7. Geschichte und Geographie. 3 St. w. Geschichte des Mittelalters bis zu den Hohenstaufen nach Schmidt's Lehrb. Th. 2. — Wiederholung der griechischen Geschichte nach Schmidt Th. 1, und der Geographie von Asien und America nach Volger. Professor *Merz.*

8. Mathematik. 4 St. w. Wiederholung der Planimetrie und Algebra nebst Uebungsaufgaben. Stereometrie. — Die Reihen, die Combinationslehre, der binomische Lehrsatz. Professor *Richter*.

9. Naturwissenschaft. 2 St. w. Einleit. in die Physik. Electricität und Magnetismus. Anfangsgründe der Chemie. Professor *Richter*.

PRIMA.

Ordinarius: Director Benecke.

Der Cursus zweijährig. *Wöchentlich* 32 *Stunden.*

1. Deutsche Sprache. 4 St. w. Davon 2 St. Erklärung von Musteraufsätzen der verschiedenen Gattungen. Dispositionsübungen. Beurtheilung der schriftlichen Ausarbeitungen. Declamationsübungen. Freie Vorträge. — Im Winter 2 St. Philosophische Propädeutik: Empirische Psychologie nach naturwissenschaftlicher Methode. Im Sommer 2 St. Geschichte der deutschen Literatur seit Opitz, verbunden mit der Lesung und Erläuterung ausgewählter Proben. Director *Benecke*.

2. Lateinische Sprache. 8 St. w. Davon 4 St. Cic. in Verr. Action. II. lib. II. Cap. 40—70. Tacit. Ann. IV. V. VI. Director *Benecke*. — 2 St. Hor. Odar. lib. III, IV. Epod. mit Auswahl. 2 St. Wiederholung einzelner Abschnitte der Grammatik, Exercitia, Extemporalia und freie Aufsätze. Dr. *Steinke*.

3. Griechische Sprache. 6 St. w. Davon 4 St. Delect. poes. elegiacae, melicae, bucolicae ed. Bach p. 20 ff. Sophocl. Aiax mit den nothwendigen Erläuterungen über die Geschichte der Elegie, des iambischen und trochäischen Gedichtes, der äolischen und dorischen Lyrik; über den Ursprung der dramatischen Poesie, die Einrichtung der alten Tragödie und die 3 vorzüglichsten Tragiker. Director *Benecke*. — 2 St. Wiederholung einzelner Abschnitte der Grammatik nebst schriftlichen Uebungen aus Rost u. Wüstemann. Curs. III. IV. Dr. *Steinke*.

4. Französische Sprache. 2 St. w. Syntax des Verbe nach Noel et Chapsal Gramm. fr. Einübung der Regeln durch Exercitien aus Tollin und Extemporalien, sowie durch einzelne freie Arbeiten. Lecture ausgewählter Gedichte aus Ideler's Handb. Th. IV. *Carl*.

5. Englische Sprache. 2 St. w. Einübung der syntaktischen Regeln durch Extemporalien; Exercitien aus Herrig's Uebungsaufgaben. Gelesen wurden ausgewählte Stücke aus Washington Irving's Sketchbook. *Carl*.

6. Religionswissenschaft. 2 St. w. Petri Lehrb. der Religion. Abschn. 2. pag. 154 bis zum Schluss p. 209. Das Ev. Johannis in der Ursprache gelesen. Professor *Merz*.

7. Geschichte. 2 St. w. Neuere Geschichte bis zum Ende des siebzehnten Jahrhunderts nach Schmidt's Grundriss der Weltgeschichte. Dr. *Töppen.*

8. Mathematik. 4 St. w. Wiederholung und Erweiterung der Geometrie und Algebra nebst Uebungsaufgaben. Die höheren arithmetischen Reihen, die unbestimmte Analytik, Theorie der höhern Gleichungen. Professor *Richter.*

9. Naturwissenschaft. 2 St. w. Wiederholung der Einleitung in die Physik. Die Statik fester Körper und Anfangsgründe der Mechanik. Chemische Naturlehre. Prof. *Richter.*

Ausserordentliche Lehrstunden.

1. Hebräische Sprache. 2 St. w. für Secunda fielen aus, weil sich kein Theilnehmer fand. — 2 St. w. für Prima; Lehre von dem unregelmässigen Verbum nach Gesenius. Einige historische Stücke und Psalme aus Gesenius Lesebuche wurden übersetzt. *Carl.*

2. Gesang. 2 St. w. Prima, Secunda und einige Schüler aus Tertia übten die Tenor- und Bassstimmen der in den übrigen Classen gesungenen vierstimmigen Gesänge; ferner mehrstimmige Gesänge für den Männerchor. Einige Data über die Musik der alten Hebräer, Griechen und Römer. Die alten Kirchentonarten. Musikdirector *Döring.*

3. Zeichnen. 4 St. w. Davon 2 St. für die Schüler der Tertia. — 2 St. für Schüler aus Prima und Secunda. *Müller.*

4. Turnen. 4 St. w. für die Schüler aller Classen. *Carl* und Dr. *Steinke.*

II. Verfügungen.

1. Vom 6. September 1848. Des Nachweises der im Laufe jeden Jahres angestellten Beamten bedarf es fernerhin nicht mehr.

2. Vom 30. September. Die geheimen Conduitenlisten in der Civilverwaltung sollen abgeschafft werden.

3. Vom 1. November. Die Dauer der jährlichen Pfingstferien wird auf eine Woche festgesetzt.

4. Vom 25. November. Den Gymnasiasten ist die Theilnahme an politischen Vereinen zu untersagen, selbst wenn Eltern oder Vormünder sie gestatten sollten.

5. Vom 3. Januar 1849. Die allen Staatsbürgern zustehenden Berechtigungen hinsichtlich der freien Meinungsäusserung gebühren gleichmässig dem Lehrerstande. Für die Äusserung von Überzeugungen, die ausserhalb des besondern Lehramts gethan werden, kann

daher eine Verantwortlichkeit auf dem Gebiete der Dienstdisciplin nicht stattfinden. Sollte aber ein Lehrer seine der bestehenden Landesverfassung widerstreitenden Ansichten in die Verwaltung seines Amtes übertragen, so wird der Minister des Unterrichts im Disciplinarwege mit unnachsichtlicher Strenge dagegen einschreiten.

6. Von demselben Datum. Bis zu der zu erwartenden Regulirung des Unterrichtswesens bleiben die dermalen bestehenden Einrichtungen in Kraft.

7. Vom 20. Januar. Übersicht über den Ausfall der bei den Gymnasien der Provinz stattgehabten Wahlen der Vertreter für die von dem Unterrichtsministerium angeordnete Berathung über die Reform der höhern Unterrichtsanstalten.

8. Vom 6. Februar. Um die Geschäfts-Correspondenz von unwesentlichen Formen zu befreien, haben sämmtliche Staatsbehörden sich aller sächlichen Prädicate, wie Hochlöblich, Wohllöblich, zu enthalten; auch statt Ein Ministerium, Eine Regierung, künftig das Ministerium, die Regierung zu sagen.

9. Vom 19. Mai. Die Benutzung der Schullocale zu politischen Versammlungen irgend welcher Art ist nicht gestattet.

10. Vom 23. Mai. Das jährliche Schulgeld ist mit Einschluss der früher entrichteten kleinern Beiträge auf 18 Rthlr. für Prima, Secunda, Tertia, auf 14 Rthlr. für Quarta, auf 12 Thlr. für Quinta, auf 10 Thlr. für Sexta festgesetzt. Von jedem Freischüler sind 2 Rthlr. jährlich zu erheben.

11. Vom 11. September. Es wird aufmerksam gemacht auf §. 20 der Verordnung vom 11. Juli d. J., betreffend die Dienstvergehen der nicht richterlichen Beamten.

Ausserdem sehe ich mich veranlasst, folgende ältere Verordnungen des Königl. Ministeriums der Geistlichen, Unterrichts- und Medicinalangelegenheiten und des Königl. Provinzial-Schulcollegiums, wiederholt in Erinnerung zu bringen:

Der Besuch von Gasthäusern, Restaurationen, Conditoreien, Billard's u. s. w. ist den Schülern verboten.

Auswärtige Zöglinge des Gymnasiums sind zur besondern Fürsorge einem tüchtigen Aufseher zu übergeben, der dem Director zuvor namhaft gemacht werden muss, und welcher über ihren Privatfleiss und ihr sittliches Betragen ausser der Schule eine ernste und gewissenhafte Aufsicht zu führen hat.

Solche Schüler, welche wegen Mangels an Fleiss, nachdem sie zwei Jahre in einer Classe gesessen haben, doch zur Versetzung in die nächsthöhere nicht für reif erklärt werden können, sollen aus den Gymnasien entfernt werden.

Es soll nicht erst eine positive Erklärung von Seiten der Eltern abgewartet werden, ob sie die Theilnahme ihrer Söhne an den Turnübungen wollen; sondern diese Theil-

nahme ist von allen Schülern vorauszusetzen, und nur auf die motivirte Erklärung der Eltern, dass sie die Theilnahme ihrer Angehörigen nicht wollen, darf eine desfallsige Dispensation ertheilt werden. Wo der Aufwand für die Turnübungen auf keine andere Weise gedeckt werden kann, soll von allen Schülern, mit Ausnahme der Freischüler, zu dem bisherigen Schulgelde ein mässiger Zusatz von höchstens einem Thaler jährlich erhoben werden.

Schüler, welche nicht bis zum achten Tage nach dem Beginn des Schulunterrichts im Vierteljahre abgemeldet sind, haben das Schulgeld für das begonnene Vierteljahr zu entrichten.

Wenn Schüler sich einer Schulstrafe durch Abgang von dem Gymnasium entziehen, so sind sie als Verwiesene zu betrachten und zu behandeln. Sie dürfen vor Ablauf eines Vierteljahrs und ohne ein glaubwürdiges Zeugniss über die Unbescholtenheit ihres Betragens und über die gewissenhafte Benutzung der Zeit seit ihrer Verweisung nicht in ein anderes Gymnasium aufgenommen werden, und sind auch von dort sofort zu entfernen, wenn sie sich nicht als gebessert und tüchtig bewähren.

III. Chronik.

Das ablaufende Schuljahr begann Montag den 16. October 1848 und wird nach der öffentlichen Prüfung Sonnabend den 13. October mit der Censur und Versetzung geschlossen werden.

Der Unterricht erlitt in seinem regelmässigen Fortgange keine erhebliche Störung, indem die Lehrer im Ganzen sich eines dauernden Wohlseins zu erfreuen hatten und bei einzelnen vorübergehenden Unpässlichkeiten von ihren Collegen bereitwillig vertreten wurden. Auch der Gesundheitszustand der Schüler war ungeachtet der im Herbste des vorigen und dieses Jahres am hiesigen Orte grassirenden Cholera keineswegs ein ungünstiger zu nennen.

Nur den Verlust eines, in jeder Beziehung sich auszeichnenden, Schülers haben wir zu betrauern, des Tertianers Georg Vogt, der am 17. Juni d. J. im Seebade zu Kahlberg ohne Verschuldung von irgend einer Seite seinen plötzlichen Tod fand. Die Anstalt bezeugte ihre Theilnahme und Liebe für ihren früh entschlafenen Zögling dadurch, dass sie seine irdischen Überreste zur lezten Ruhestatt geleitete.

In die Klagen derjenigen Gymnasien, die hinsichtlich des Unterrichts und der Disciplin unter den politischen Aufregungen der Jahre 1848 und 1849 schwer gelitten zu haben bekennen, brauchen wir glücklicherweise nicht einzustimmen, da bei uns vielleicht niemals weniger, selbst leichte, Verletzungen der Schulordnung vorgekommen sind, als gerade in der Zeit der Anarchie, obgleich diese auch in unsrer Stadt zu verschiedenen Malen bedeutende Tumulte

hervorrief, an denen freilich der gebildete, Gesetz und Freiheit liebende Kern der Bürgerschaft nicht den geringsten Antheil hatte.

Die Sommerferien mussten um 14 Tage verlängert werden, da der schon früher nöthig befundene und veranschlagte Reparaturbau an den Gymnasialgebäuden in diesem Jahre ausgeführt wurde und innerhalb der anberaumten Frist von 4 Wochen noch nicht so weit gediehen war, dass der Unterricht zur festgesetzten Zeit wieder begonnen werden konnte. Das Gymnasium hat in einigen Zimmern neue Fussböden, Öfen, Thüren und Fenster, ferner neue Dachrinnen, einen neuen Abputz und eine neue Freitreppe erhalten. Der freie Platz vor dem Gymnasium ist geebnet, durch zweckmässige Abwässerung trocken gelegt und mit theilweise neuer Umzäunung versehen. Eben so sind an der Directorwohnung die dringendsten Reparaturen vorgenommen, die freilich den alten, in ihren Erdgeschossen durch und durch verstockten und in der Bedachung schadhaften, Gebäuden die längst verlorene Bewohnbarkeit des grössten Theils nicht wiedergeben konnten. Schade, dass wir alle diese Verbesserungen durch den Verlust der schönen alten Linde an der Freitreppe und durch die Verstümmelung ihrer Nachbarinnen erkaufen mussten.

Dem Gesang- und Schreiblehrer Herrn Musikdirector Döring ist zu dem bisherigen Gehalte eine jährliche Zulage von 66 Rthlr. 7 Sgr. 6 Pf. bewilligt worden.

Die Pensionen der schon vor längerer Zeit in den Ruhestand versetzten Lehrer des Gymnasiums sind vom 1. October 1848, die des zuletzt aus dem Lehrercollegium geschiedenen Herrn Professor Buchner vom 1. Januar d. J. ab im ganzen Betrage auf den Pensionsfonds übernommen.

Nachdem durch diese Massregel die vacante erste Oberlehrerstelle wieder besetzbar geworden war, hat das Königl. Ministerium mittels Rescripts vom 31. Juli c. dieselbe dem Herrn Professor Merz verliehen; wegen Besetzung der dadurch erledigten zweiten Oberlehrerstelle sich die Entscheidung noch vorbehalten.

Am 15. Januar c. beehrte der Königl. Regierungs- und Schulrath Herr Dr. Dieckmann das Gymnasium mit seinem Besuche und widmete während der ganzen Schulzeit dem Unterrichte in allen Classen seine theilnehmende Aufmerksamkeit.

So haben wir im Laufe des verwichenen Schuljahrs von Seiten der vorgesetzten Behörden mannichfache Beweise wohlwollender Fürsorge erhalten, deren Erwähnung wir nicht schliessen können, ohne den gebührenden Dank dafür abzustatten und ohne uns frohen Aussichten für die Zukunft hinzugeben.

Der Turnunterricht erfuhr in sofern eine Abänderung, als die Schüler des Gymnasiums während des Sommers d. J. unter Leitung der Herren Dr. Steinke und Carl die gymnastischen Übungen in abgesonderten Stunden für sich anstellten.

IV. Statistische Übersicht.

Das Lehrercollegium hat zur Zeit folgende Mitglieder:

1. Dr. Benecke, Director und Professor.
2. Merz, K. Professor.
3. Die zweite Oberlehrerstelle ist vacant.
4. Richter, K. Professor.
5. Sahme, Oberlehrer.
6. Scheibert, Oberlehrer.
7. Lindenroth, ordentlicher Lehrer.
8. Dr. Steinke, ordentlicher Lehrer.
9. Carl, ordentlicher Lehrer der engl. und franz. Sprache.
10. Döring, Musikdirector, Gesang- und Schreiblehrer.
11. Müller, Zeichenlehrer.
12. Dr. Töppen, Hülfslehrer.

Die Gesammtzahl der Schüler betrug gegen den Schluss des vorigen Schuljahres (am 15. September 1848) 147, von denen 11 in I., 29 in II., 31 in III., 20 in IV., 28 in V., 28 in VI. sich befanden. Abgegangen sind seit jenem Datum theils noch vor dem Anfange des laufenden Schuljahrs, theils während desselben 47. Neu aufgenommen dagegen sind 36, so dass das Gymnasium gegenwärtig (den 15. September 1849) 136 Schüler zählt, unter denen 11 in I., 18 in II., 19 in III., 26 in IV., 34 in V., 28 in VI. sitzen. Die Döring'sche Privat-Vorbereitungsschule wird von 83 Knaben besucht.

Zu Michaelis 1848 wurden 8 Schüler mit dem Zeugnisse der Reife zur Universität entlassen:

1. Friedrich Alsen aus Elbing, 19½ Jahr alt, evangelischer Confession, Sohn des hiesigen Commerzienrathes Herrn Alsen, 12 Jahre auf dem Gymnasium, 3 Jahr in Prima, welcher in Berlin Jura und Cameralia studiren wollte.

2. Alfred Benetsch aus Schwetz, 19 Jahr alt, evangelischer Confession, Sohn des Kreis-Justizraths Herrn Benetsch in Stuhm, gebildet auf den Gymnasien zu Danzig, Marienwerder und Elbing, 2 Jahre in Prima, der in Königsberg sich dem Studium der Medicin zu widmen gedachte.

3. Rudolph Petzenbürger aus Marienburg, 20¾ Jahr alt, evangelischer Confession, Sohn des verstorbenen Kaufmanns Herrn Petzenbürger in Marienburg, 6 Jahr auf dem Gymnasium, 3 Jahre in Prima, welcher in Königsberg Jura zu studiren Willens war.

4. Adolph Putzroth aus Heiligenbeil, 21 Jahr alt, mosaischer Confession, Sohn des

Kaufmanns Herrn Putzroth in Mehlsack, 5 Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, der in Königsberg Philologie zu studiren beabsichtigte.

5. Paul Rogge aus Elbing, 17¾ Jahr alt, evangelischer Confession, Sohn des Kaufmanns Herrn Rogge hieselbst, 4 Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, der in Berlin dem Studium der Medicin sich zuwenden wollte.

6. Adolph Sablotny aus Elbing, 17½ Jahr alt, evangelischer Confession, Sohn des hier verstorbenen Hauptmanns Herrn Sablotny, 9 Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, der in Halle Jura und Cameralia zu studiren beschlossen hatte.

7. Philipp Schulz aus Johannisburg, 18¾ Jahr alt, evangelischer Confession, Sohn des Superintendenten Herrn Schulz in Johannisburg, 4¾ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, welcher in Königsberg Jura studiren wollte.

8. Heinrich Zarnikow aus Elbing, 19½ Jahr alt, evangelischer Confession, Sohn des hiesigen Kaufmanns Herrn Zarnikow, 11 Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, welcher in Königsberg Jura zu studiren gedachte.

V. Lehrapparat.

1. Die Bibliothek des Gymnasiums hat in diesem Schuljahre von dem Königl. Ministerium der Geistlichen, Unterrichts- und Medicinalangelegenheiten zum Geschenke erhalten: Rheinisches Museum für Philologie. Neue Folge. Jahrgang VI. Welcker's epischer Cyclus. Theil 2. Haupt's Zeitschrift für Deutsches Alterthum. VII. 2. 3. Schulze's Gothisches Glossar. Spruner's historisch-geographischer Handatlas. Lief. 12. Bernd's Hauptstücke der Wappenwissenschaft. Abth. 2. Bernd's die drei deutschen Farben. Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 37. 2. 3. 4. Bd. 38. Verhandlungen über die Reorganisation der höhern Schulen. Ausserdem ist die Bibliothek aus dem ihr zugewiesenen Fonds auf angemessene Weise vermehrt worden.

2. Die Schülerbibliothek ist durch die Beiträge der einzelnen Classen erweitert.

3. u. 4. Die Sammlung physikalischer Instrumente und das chemische Laboratorium sind für die ausgesetzte Summe nicht nur im erforderlichen Stande erhalten, sondern es wurden auch neu angeschafft: eine kleine Hochdruck-Dampfmaschine von Schichau, ein Equilibrist von v. Krause, Bessel's populäre Vorlesungen über wissenschaftliche Gegenstände, Schödler's Buch der Natur, Jahn's wöchentliche Unterhaltungen über Astronomie, Geographie und Witterungskunde Jahrgang 1849. Zum Geschenk erhielt das physikalische Cabinet eine Geschichte der Aerostatik in 2 Bänden, so wie mehrere von Schülern der Prima und Secunda gefertigte statische und elektrische Apparate und stereometrische Modelle.

5. Den naturhistorischen Sammlungen wurde von Herrn Stadtrath F. Housselle ein ausgestopfter Albatros, ein skeletirter Albatros und ein Carbo graculus geschenkt.

6—9. Für Vorschriften, Vorzeichnungen, Musikalien konnte nach Bedürfniss gesorgt werden.

Den fortgesetzten Beweisen des Wohlwollens verfehlen wir nicht, im Namen der Schule hiedurch den verbindlichsten Dank abzustatten.

VI. Ordnung der öffentlichen Prüfung.

Donnerstag.

Choral.

Sexta. 1. Religion. *Lindenroth.*
2. Latein. Oberlehrer *Scheibert.*

Aus dieser Classe declamiren

Cäsar Würtemberg: Die beiden Wächter von Gellert.
Hermann Rosomm: Der Kampf der Riesenschlange mit dem Tiger von Rückert.
Wilhelm Boschke: Schwäbische Kunde von Uhland.

Quinta. 1. Deutsch. *Lindenroth.*
2. Geographie. Oberlehrer *Sahme.*

Aus dieser Classe declamiren

Ludwig Kluge: Carl der Grosse aus dem Münchener Festkalender.
Gustav Figuhr: Einladung von Knapp.
August Mackowsky: Die edle Musica von Hagenbach.

Pause.

Chorlied gesungen von der ersten Abtheilung.

Quarta. 1. Gesang. Musikdirector *Döring.*
2. Naturgeschichte. Oberlehrer *Scheibert.*
3. Geschichte. Dr. *Töppen.*

Aus dieser Classe declamiren

Franz Schultz: Der Überfall im Wildbad von Uhland.
Heinrich Haack: Der Teufel in Salamanca von Körner.
Julius Foss: Von einem tôrechten schuolpfaffen von Bonerius.

Schlussgesang.

Freitag.

Choral.

Tertia. 1. Religion. *Carl.*

2. Mathematatik. Professor *Richter.*

Aus dieser Classe declamiren

Emil Schönfeld: Das alte und das neue Griechenland von Fr. Jacobs.

Paul Zimmermann: Die Zerstörung von Pompeji von Fitzinger.

Liebmann Levinsohn: Das Glöcklein des Glücks von Seidl.

Secunda. 1. Physik. Professor *Richter.*

2. Griechisch. Professor *Merz.*

Aus dieser Classe declamiren

Emil Titius: Hektors Tod von Homer, deutsch und griechisch.

Adolph Wisselinck und Ludwig Alsen eine Scene aus Voltaire's Mahomet.

Ludwig Foss beantwortet in einem eigenen Vortrage die Frage aus Goethe's Hermann und Dorothea:

Ist wohl der ein würdiger Mann, der im Glück und im Unglück
Sich nur allein bedenkt, und Leiden und Freuden zu theilen
Nicht versteht, und nicht dazu von Herzen bewegt wird?

Pause.

Chor von Seidel.

Prima. 1. Latein. Dr. *Steinke.*

2. Französisch. *Carl.*

Aus dieser Classe versuchen sich in eigenen Reden

Adolph Stellmacher: De bonarum literarum studio potentissimo animi consolandi praesidio et adiumento.

Friedrich Figuhr: On the necessity of a German navy and the means of procuring it.

Hermann Schwarzrock: Über den Unterschied der antiken und der christlichen Kunst.

Schlusschoral.

Der neue Lehrcursus nimmt Donnerstag den 25. October seinen Anfang. Der Anmeldung neu aufzunehmender Schüler wird der Unterzeichnete Montag den 23. October von 9—12 Uhr Vormittags entgegensehen, und wegen Prüfung derselben das Nähere bestimmen.

Benecke.

Das summatorische Glied

solcher Reihen zu bestimmen, welche durch Multiplikation arithmetischer Reihen erster Ordnung entstanden sind.

Von **A. Richter.**

§. *1.* *Es wird im Folgenden vorausgesetzt, dass die Glieder einer Progression nach der Ordnung der natürlichen Zahlen gezählt werden, so dass das Anfangsglied das* *erste* *heisst. Unter dieser Voraussetzung sei das* **allgemeine** *Glied einer Reihe das* n*te Glied derselben und werde bezeichnet durch* t_n. *Das* **summatorische** *Glied ist die Summe der* n *ersten Glieder und werde bezeichnet durch* $\int_n$ *oder durch* $\int t_n$. *Zuweilen ist es zweckmässig, das summatorische Glied durch ein* $\int$ *vor dem Werthe des allgemeinen Gliedes anzudeuten. Wenn z. B.* $t_n = n^3$, *so ist*

$$\int_n = \int t_n = \int n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + (n-1)^3 + n^3$$

Ist $t_n = (n+1)^3$, *so ist*

$$\int_n = \int t_n = \int (n+1)^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$$

Zusatz 1. Es folgt hieraus, dass $\int (n+1)^3 - \int n^3 = (n+1)^3 - 1$,
und allgemein . . . . $\int (n+1)^r - \int n^r = (n+1)^r - 1$.

Zusatz 2. Wenn das allgemeine Glied einer Reihe eine **konstante** *Zahl, also jedes Glied der Reihe dieser Zahl gleich ist, so ist das summatorische Glied gleich dem* n*fachen allgemeinen Gliede.*

Wenn $t_n = a$, *so ist* $\int a = na$.

Denn $\int a = \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} + \ldots + \overset{n-1}{a} + \overset{n}{a} = na$. *Es ist also auch*

$$\int n^0 = \int 1 = n;\ \int 2 = 2n \ \textit{u. s. w.}$$

§. 2. Lehrsatz. *Wenn das allgemeine Glied einer gegebenen Reihe ein Polynom ist, so kann die Reihe als eine Summe von mehreren einzelnen Reihen angesehen werden, deren allgemeine Glieder die einzelnen Glieder des Polynoms sind. Das summatorische Glied der gegebenen Reihe besteht also aus den summatorischen Gliedern dieser einzelnen Reihen.*

Wenn $t_n = a_n + b_n + c_n$, *so ist* $\int t_n = \int a_n + \int b_n + \int c_n$

Denn setzt man für n *nach einander die natürlichen Zahlen, und bezeichnet die Glieder durch* $t_1, t_2, \ldots$, *so wie durch* $a_1, a_2, \ldots$ *u. s. w. die entsprechenden Werthe derselben, so ist*

$$t_1 = a_1 + b_1 + c_1$$
$$t_2 = a_2 + b_2 + c_2$$
$$\vdots$$
$$t_n = a_n + b_n + c_n, \text{ also}$$

$$\int t_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) + (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)$$
$$= \int a_n + \int b_n + \int c_n$$

§. 3. Lehrsatz. *Die Differenz der summatorischen Glieder zweier gegebener Reihen ist gleich dem summatorischen Gliede einer Reihe, deren allgemeines Glied die Differenz der allgemeinen Glieder der gegebenen Reihen ist.*

Es seien t'_n *und* t''_n *die allgemeinen Glieder zweier gegebener Reihen, so sind* $\int t'_n$ *und* $\int t''_n$ *ihre summatorischen Glieder, und* $\int(t'_n - t''_n)$ *das summatorische Glied einer Reihe, deren allgemeines Glied* $= t'_n - t''_n$. *Es soll also sein* $\int t'_n - \int t''_n = \int(t'_n - t''_n)$.

Es sei $\int t'_n = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + \ldots\ldots + t'_n$, *und*

$$\int t''_n = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + \ldots\ldots + t''_n,$$

so ist $\int t'_n - \int t''_n = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) + (c_1 - c_2) + \ldots + (t'_n - t''_n)$.
Es ist aber $t'_n - t''_n$ *das allgemeine Glied der Reihe* $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) + \ldots$; *folglich ist das summatorische Glied derselben* $= \int(t'_n - t''_n)$, *und somit* $\int t'_n - \int t''_n = \int(t'_n - t''_n)$.

§. 4. Lehrsatz. *Wenn das allgemeine Glied einer Reihe ein* **konstantes** *Vielfache von dem allgemeinen Gliede einer zweiten Reihe ist, so ist auch das summatorische Glied der ersten Reihe dasselbe konstante Vielfache von dem summatorischen Gliede der zweiten Reihe.*

Wenn $t'_n = p \cdot t''_n$, *so ist* $\int t'_n = p \cdot \int t''_n$.

Es sei . . . . $\int t'_n = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + \ldots + t'_n$

und . . . . $\int t''_n = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + \ldots + t''_n$.

Nach der Annahme ist $t'_n = p \cdot t''_n$, *also* $a_1 = p \cdot a_2$, $b_1 = p \cdot b_2$, $\ldots$;

Folglich $\int t'^n = p \cdot a_2 + p \cdot b_2 + p \cdot c_2 + p \cdot d_2 + \ldots + p \cdot t''_n$

$$= p \cdot (a_2 + b_2 + c_2 + \ldots + t''_n) = p \cdot \int t''_n.$$

Zusatz. Wenn die Differenz der allgemeinen Glieder zweier Reihen gleich ist einem konstanten Vielfachen von dem allgemeinen Gliede einer dritten Reihe, so ist die Differenz der summatorischen Glieder der beiden ersten Reihen gleich demselben konstanten Vielfachen von dem summatorischen Gliede der dritten Reihe.

Wenn $t'_n - t''_n = p \cdot t_n$, *so ist* $\int t'_n - \int t''_n = p \cdot \int t_n$

Denn $\int t'_n - \int t''_n = \int (t'_n - t''_n)$ *nach §. 3,* $= \int p \cdot t_n = p \cdot \int t_n$.

§. 5. Lehnsatz. Die allgemeine Form der geometrischen Reihe ist

$$a, ae, ae^2, ae^3, \ldots\ldots\ldots ae^{n-1}$$

Hier ist $t_n = ae^{n-1}$, *und* $\int t_n = \dfrac{a(e^n - 1)}{e - 1}$

Zusatz. Erhebt man sämmtliche Glieder einer geometrischen Reihe auf einerlei Potenz, so erhält man $a^p, (ae)^p, (ae^2)^p, (ae^3)^p, \ldots\ldots (ae^{n-1})^p$

oder ... $a^p, a^p e^p, a^p e^{2p}, a^p e^{3p}, \ldots\ldots a^p e^{(n-1)p}$

Das erste Glied dieser Reihe ist a^p *und der Faktor (Exponent) derselben ist* e^p. *Setzt man also in die Summenformel des §. 5* a^p *statt* a, *und* e^p *statt* e, *so ist*

$$\int (ae^{n-1})^p = \frac{a^p(e^{np} - 1)}{e^p - 1}$$

§. 6. Lehnsatz. Die allgemeine Form der arithmetischen Reihe der ersten Ordnung ist $a, a + d, a + 2d, \ldots\ldots a + (n - 1)d$.

Hier ist $t_n = a + (n - 1)d = dn + (a - d)$, *und* $\int n = \frac{1}{2} n (a + t_n)$.

Zusatz. Das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe der ersten Ordnung ist eine Funktion des ersten Grades von der Stellenzahl n, *und kann allgemein durch* $t_n = \alpha n + \beta$ *vorgestellt werden, wo die konstanten Koeffizienten* α *und* β *in jedem speziellen Falle aus 2 gegebenen Gliedern nebst ihren Stellenzahlen bestimmt werden können.*

Beispiel. Das 5te und 8te Glied einer Reihe sei 16 *und* 25, *so ist* $5\alpha + \beta = 16$, *und* $8\alpha + \beta = 25$; *also* $\alpha = 3$, $\beta = 1$, *und* $t_n = 3n + 1$; *mithin ist die Reihe:* 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, ... $(3n + 1)$.

Nach dieser Vorbereitung gehen wir an die Lösung der Aufgabe (§. 8. 9), welche den Inhalt der vorliegenden Abhandlung bildet:

> *Das summatorische Glied einer Reihe zu bestimmen, welche durch Multiplikation beliebig vieler arithmetischer Reihen erster Ordnung entstanden ist.*

Die Auflösung gründen wir auf einen speziellen Fall in §. 7, und fügen dann in den §. 10—13 die unabhängige Lösung besonderer Fälle hinzu. Den Schluss bildet in §. 14. 15 als Anhang eine Aufgabe, die zwar nicht in der allgemeinen enthalten, aber doch mit ihr verwandt ist.

Möge die elementare Behandlung des Stoffes nicht ohne anregenden Einfluss auf den Privatfleiss unserer fähigeren Schüler bleiben.

§. 7. *Aufgabe. Die Summe der natürlichen Zahlen, welche auf einerlei Potenz erhoben sind, zu finden.*

Das allgemeine oder n*te Glied der* r*ten Potenz der natürlichen Zahlenreihe ist* n^r*; es soll also* $\int n^r$ *gefunden werden.*

Auflösung. Nach dem Binomialtheorem ist

$$(n+1)^r = n^r + r \,.\, n^{r-1} + \frac{r \,.\, r-1}{1 \,.\, 2} \,.\, n^{r-2} + \frac{r \,.\, r-1 \,.\, r-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, n^{r-3} + \ldots\ldots$$

Betrachtet man $(n+1)^r$ *als das allgemeine Glied einer Reihe, so ist nach* §. 2 *und* 4, *weil die Koeffizienten* r, $\frac{r \,.\, r-1}{1 \,.\, 2}$ *u. s. w. konstant sind,*

$$\int (n+1)^r = \int n^r + r \int n^{r-1} + \frac{r \,.\, r-1}{1 \,.\, 2} \int n^{r-2} + \frac{r \,.\, r-1 \,.\, r-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \int n^{r-3} + \ldots\ldots$$

also wenn $\int n^r$ *auf die linke Seite gesetzt wird, nach* §. *1. Zus. 1.*

$$(n+1)^r - 1 = r \int n^{r-1} + \frac{r \,.\, r-1}{1 \,.\, 2} \int n^{r-2} + \frac{r \,.\, r-1 \,.\, r-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \int n^{r-3} + \ldots\ldots$$

folglich $$\int n^{r-1} = \frac{(n+1)^r - 1}{r} - \frac{r-1}{2} \int n^{r-2} - \frac{r-1 \,.\, r-2}{2 \,.\, 3} \int n^{r-3} - \ldots\ldots$$

oder, wenn r *statt* r — 1 *gesetzt wird,*

$$\int n^r = \frac{(n+1)^{r+1} - 1}{r+1} - \frac{r}{2} \int n^{r-1} - \frac{r \,.\, r-1}{2 \,.\, 3} \int n^{r-2} - \ldots\ldots$$

Vermittelst dieser Formel kann also das summatorische Glied der r*ten Potenzreihe der natürlichen Zahlen aus allen niedrigeren Potenzreihen gefunden werden.*

Setzt man für r *nach einander die Werthe* 0, 1, 2, 3, ..., *so bricht die Reihe rechter Hand vor dem Gliede ab, in welchem einer der Faktoren* r, r — 1, r — 2, ... *gleich Null wird. Man erhält also*

$$\int n^0 = (n+1) - 1 = n$$

$$\int n^1 = \frac{(n+1)^2 - 1}{2} - \frac{1}{2} \int n^0$$

$$\int n^2 = \frac{(n+1)^3 - 1}{3} - \frac{2}{2} \int n^1 - \frac{2 \,.\, 1}{2 \,.\, 3} \int n^0$$

$$\int n^3 = \frac{(n+1)^4 - 1}{4} - \frac{3}{2} \int n^2 - \frac{3 \,.\, 2}{2 \,.\, 3} \int n^1 - \frac{3 \,.\, 2 \,.\, 1}{2 \,.\, 3 \,.\, 4} \int n^0$$

$$\int n^4 = \frac{(n+1)^5 - 1}{5} - \frac{4}{2} \int n^3 - \frac{4 \,.\, 3}{2 \,.\, 3} \int n^2 - \frac{4 \,.\, 3 \,.\, 2}{2 \,.\, 3 \,.\, 4} \int n^1 - \frac{4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} \int n^0$$

$$\int n^5 = \frac{(n+1)^6 - 1}{6} - \frac{5}{2}\int n^4 - \frac{5.4}{2.3}\int n^3 - \frac{5.4.3}{2.3.4}\int n^2 - \frac{5.4.3.2}{2.3.4.5}\int n^1 - \frac{5.4.3.2.1}{2.3.4.5.6}\int n^0$$

u. s. w.

Weil $\int n^0 = n$ *(§. 1 Zus. 2), und das erste und letzte Glied auf der rechten Seite einerlei Nenner haben, so kann man nach Aufhebung der gemeinschaftlichen Faktoren auch schreiben:*

$$\int n^0 = n$$

$$\int n^1 = \frac{(n+1)^2}{2} - \frac{n+1}{2}$$

$$\int n^2 = \frac{(n+1)^3}{3} - \int n^1 - \frac{n+1}{3}$$

$$\int n^3 = \frac{(n+1)^4}{4} - \frac{3}{2}\int n^2 - \int n^1 - \frac{n+1}{4}$$

$$\int n^4 = \frac{(n+1)^5}{5} - 2\int n^3 - 2\int n^2 - \int n^1 - \frac{n+1}{5}$$

$$\int n^5 = \frac{(n+1)^6}{6} - \frac{5}{2}\int n^4 - \frac{10}{3}\int n^3 - \frac{5}{2}\int n^2 - \int n^1 - \frac{n+1}{6} \text{ u. s. w.}$$

Substituirt man in jeder Gleichung die für $\int n^1, \int n^2, \int n^3, \ldots$ *aus den vorhergehenden Gleichungen folgenden Werthe und entwickelt die Formeln 1) nach den Potenzen von* n *oder 2) nach* $m = n.(n+1)$, *so findet man*

$$\int n^0 = n$$

$$\int n^1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \quad \ldots \quad = \frac{m}{2}$$

$$\int n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad \ldots \quad = \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{m}{2}$$

$$\int n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \quad \ldots \quad = \frac{m^2}{4}$$

$$\int n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \quad \ldots \quad = \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{3m-1}{5}$$

$$\int n^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12} \quad \ldots \quad = \frac{m^2}{4} \cdot \frac{2m-1}{3}$$

$$\int n^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42} \quad \ldots \quad = \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{3m^2 - 3m + 1}{7}$$

$$\int n^7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12} \quad \ldots \quad = \frac{m^2}{4} \cdot \frac{3m^2 - 4m + 2}{6}$$

$$\int n^8 = \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{2} + \frac{2n^7}{3} - \frac{7n^5}{15} + \frac{2n^3}{9} - \frac{n}{30} \quad \ldots \quad = \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{5m^3 - 10m^2 + 9m - 3}{15}$$

$$\int n^9 = \frac{n^{10}}{10} + \frac{n^9}{2} + \frac{3n^8}{4} - \frac{7n^6}{10} + \frac{n^4}{2} - \frac{3n^2}{20} \quad \ldots \quad = \frac{m^2}{4} \cdot \frac{2m^3 - 5m^2 + 6m - 3}{5}$$

$$\int n^{10} = \frac{n^{11}}{11} + \frac{n^{10}}{2} + \frac{5n^9}{6} - n^7 + n^5 - \frac{n^3}{2} + \frac{5n}{66}$$

$$= \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{3m^4 - 10m^3 + 17m^2 - 15m + 5}{11}$$

$$\int n^{11} = \frac{n^{12}}{12} + \frac{n^{11}}{2} + \frac{11n^{10}}{12} - \frac{11n^8}{8} + \frac{11n^6}{6} - \frac{11n^4}{8} + \frac{5n^2}{12}$$

$$= \frac{m^2}{4} \cdot \frac{2m^4 - 8m^3 + 17m^2 - 20m + 10}{6}$$

$$\int n^{12} = \frac{n^{13}}{13} + \frac{n^{12}}{2} + n^{11} - \frac{11n^9}{6} + \frac{22n^7}{7} - \frac{33n^5}{10} + \frac{5n^3}{3} - \frac{691n}{2730}$$

$$= \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{105m^5 - 525m^4 + 1435m^3 - 2360m^2 + 2073m - 691}{455 = 5.7.13}$$

$$\int n^{13} = \frac{n^{14}}{14} + \frac{n^{13}}{2} + \frac{13n^{12}}{12} - \frac{143n^{10}}{60} + \frac{143n^8}{28} - \frac{143n^6}{20} + \frac{65n^4}{12} - \frac{691n^2}{420}$$

$$= \frac{m^2}{4} \cdot \frac{30m^5 - 175m^4 + 574m^3 - 1180m^2 + 1382m - 691}{105 = 3.5.7}$$

$$\int n^{14} = \frac{n^{15}}{15} + \frac{n^{14}}{2} + \frac{7n^{13}}{6} - \frac{91n^{11}}{30} + \frac{143n^9}{18} - \frac{143n^7}{10} + \frac{91n^5}{6} - \frac{691n^3}{90} + \frac{7n}{6}$$

$$= \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{3m^6 - 21m^5 + 84m^4 - 220m^3 + 359m^2 - 315m + 105}{15}$$

$$\int n^{15} = \frac{n^{16}}{16} + \frac{n^{15}}{2} + \frac{5n^{14}}{4} - \frac{91n^{12}}{24} + \frac{143n^{10}}{12} - \frac{429n^8}{16} + \frac{455n^6}{12} - \frac{691n^4}{24} + \frac{35n^2}{4}$$

$$= \frac{m_2}{4} \cdot \frac{3m^6 - 24m^5 + 112m^4 - 352m^3 + 718m^2 - 840m + 420}{12}$$

Zusatz 1. Diese Formeln haben merkwürdige Eigenschaften. Betrachten wir zunächst die erste Gruppe derselben, so ergiebt sich:

1) der Exponent des ersten Gliedes ist um 1 *grösser als der Exponent des summatorischen Gliedes.*

2) Die Exponenten der 3 ersten Glieder fallen um 1*, von da ab immer um* 2*. Daher hat*

3) die Formel $\int n^r$ *1)* $\frac{1}{2}(r+3)$ *Glieder für ein ungerades* r *und 2)* $\frac{1}{2}(r+4)$ *Glieder für ein gerades* r*, oder allgemein* $p+2$ *Glieder, wenn* $r = 2p + 1$ *oder* $= 2p$ *ist; mithin haben* $\int n^{2p}$ *und* $\int n^{2p+1}$ *gleichviele Glieder. Auch folgt*

4) die Formel $\int n^r$ *hat im letzten Gliede* n *in der ersten Potenz, wenn* r *eine gerade Zahl ist; dagegen* n^2 *(mit Ausnahme von* $\int n^1$*), wenn* r *eine ungerade Zahl ist.*

5) Die Vorzeichen der 3 ersten Glieder sind +*, dann wechseln sie regelmässig ab.*

6) Der Koeffizient des ersten Gliedes ist der reziproke Werth seines Exponenten.

7) Der Koeffizient des zweiten Gliedes ist konstant $= \frac{1}{2}$.

8) Der Koeffizient des dritten Gliedes ist der zwölfte Theil von dem Exponenten des zweiten Gliedes.

9) Die übrigen Koeffizienten folgen verwickelteren Gesetzen (vergl. Zus. 2). Nur ist noch zu bemerken, dass die algebraische Summe der Koeffizienten jedes summatorischen Gliedes $= 1$ *ist.*

Aus der zweiten Gruppe der Formeln erhellet, dass mit Ausnahme von $\int n^0$ *und* $\int n^1$

10) alle summatorischen Glieder von der Form $\int n^{2p+1}$ *den gemeinsamen Faktor* $m^2 = n^2 (n+1)^2$, *die von der Form* $\int n^{2p}$ *den gemeinsamen Faktor* $(2n+1) \,.\, m = n \,.\, (n+1)\,(2n+1)$ *haben.*

Zusatz 2. Die Berechnung der Summenformel $\int n^r$ *nach der im §. angegebenen Methode wird immer mühsamer, je grösser* r *ist; sie wird aber durch folgende einfache Regel sehr erleichtert. Man bezeichne die absoluten Koeffizienten des letzten Gliedes in der ersten Gruppe der summatorischen Glieder* $\int n^0, \int n^1, \int n^2, \int n^3, \ldots$ *durch* $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, *wo der Fussexponent von* a *dem Exponenten in dem zugehörigen Gliede* $\int n^r$ *entspricht. Diese Reihe* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *werde bis zur* (r—1)*ten oder bis zur* (r—2)*ten Potenz fortgesetzt, je nachdem* r *eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. Ferner bezeichne man die Binomial-Koeffizienten der* (r + 1)*ten Potenz durch* $B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots$ *wo* $B_0 = 1$ *als Koeffizient des ersten Gliedes,* $B_1 = r + 1$ *als K. des zweiten Gliedes,* $B_2 = \frac{1}{2}(r+1)\,r$ *als K. des dritten Gl. u. s. w. · Multiplicirt man nun folgende zwei Reihen:*

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_4,\ a_6,\ a_8,\ a_{10},\ \ldots\ldots \qquad (\alpha)$$

$$\frac{B_0}{B_1},\ \frac{B_1}{B_1},\ \frac{B_2}{B_1},\ \frac{B_4}{B_1},\ \frac{B_6}{B_1},\ \frac{B_8}{B_1},\ \frac{B_{10}}{B_1},\ \ldots\ldots \qquad (\beta)$$

Glied für Glied mit einander, so erhält man die Koeffizienten des summatorischen Gliedes $\int n^r$. *Man gebe nun nach Anleitung der Regeln im Zus. 1 diesen Koeffizienten noch die erforderlichen Vorzeichen, und beachte, dass* $\frac{a_0 B_0}{B_1} = \frac{1}{r+1}$, $\frac{a_1 B_1}{B_1} = a_1 = \frac{1}{2}$, *so findet man die Koeffizienten von* $\int n^r =$

$$\frac{1}{r+1} + \frac{1}{2} + \frac{a_2 B_2}{r+1} - \frac{a_4 B_4}{r+1} + \frac{a_6 B_6}{r+1} - \frac{a_8 B_8}{r+1} + \ldots$$

Es ist jedoch zu bemerken, dass für ein gerades r *der letzte Koeffizient von* $\int n^r$ *durch diese Regel nicht gefunden wird, welcher daher nach Zus. 1 Nro. 9 bestimmt werden muss. — Wir wollen diese Regel durch folgende Beispiele erläutern. Die summatorischen Glieder sind im §. bis* $\int n^{15}$ *entwickelt worden. Man verlangt nun hieraus* $\int n^{16}$ *und* $\int n^{17}$ *zu finden. Für* $\int n^{16}$ *ist* r *eine gerade Zahl, wir setzen also in der Zeile* K_{14} *die Koeffizienten* $a_0, a_1 \ldots$ *bis* $\int n^{14}$ *und darunter in der Zeile* B_{17} *die Binomial-Koeffizienten der 17ten Potenz, jeden durch 17 dividirt, gemäss den obigen Reihen* α *u.* β. *Die Produkte beider Reihen geben die Koeffizienten von* $\int n^{16}$.

$$K_{14} = 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{30},\ \tfrac{1}{42},\ \tfrac{1}{30},\ \tfrac{5}{66},\ \tfrac{691}{2730},\ \tfrac{7}{6}$$
$$B_{17} = \tfrac{1}{17},\ 1,\ 8,\ 140,\ 728,\ 1430,\ 1144,\ 364,\ 40,\ \ldots$$
$$\int n^{16} = \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{3} - \tfrac{14}{3} + \tfrac{52}{3} - \tfrac{143}{3} + \tfrac{260}{3} - \tfrac{1382}{15} + \tfrac{140}{3} - \tfrac{3617}{510}$$

Ebenso stehen in der Zeile K_{16} *die Koeffizienten* a_0, a_1, ... *bis* $\int n^{16}$, *und in der Zeile* B_{18} *die Binomial-Koeffizienten der* **18***ten Potenz, jeder durch* **18** *dividirt, gemäss* α *und* β. *Die Produkte beider Zeilen geben die Koeffizienten von* $\int n^{17}$

$$K_{16} = 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{30},\ \tfrac{1}{42},\ \tfrac{1}{30},\ \tfrac{5}{66},\ \tfrac{691}{2730},\ \tfrac{7}{6},\ \tfrac{3617}{510}$$
$$B_{18} = \tfrac{1}{18},\ 1,\ \tfrac{17}{2},\ 170,\ \tfrac{3094}{3},\ 2431,\ 2431,\ \tfrac{3094}{3},\ 170,\ \tfrac{17}{2}$$
$$n^{17} = \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{17}{12} - \tfrac{17}{3} + \tfrac{221}{9} - \tfrac{2431}{30} + \tfrac{1105}{6} - \tfrac{11747}{45} + \tfrac{595}{3} - \tfrac{3617}{60}$$

Zusatz 3. *Schliesslich deuten wir noch einige merkwürdige Relationen zwischen diesen Summenformeln an:*

1. $\int n^3 = (\int n^1)^2$ 2. $\int n^3 - 1 = (\int n^1 + 1)\ (\int n^1 - 1)$

3. $\int n^3 - \int n^1 = (\int {}^1t_{n-1} \,.\, \int {}^1t_{n+1} = \tfrac{1}{4}(n-1) \,.\, n \,.\, (n+1)(n+2)$

4. $\int n^5 - \int n^3 = \tfrac{4}{3}\int {}^1t_{n-1} \,.\, \int {}^1t_n \,.\, \int {}^1t_{n+1} = \tfrac{1}{6}(n-1) \,.\, n^2 \,.\, (n+1)^2 \,.\, (n+1)$

5. $\dfrac{\int n^5 - \int n^3}{\int n^3 - \int n^1} = \tfrac{4}{3}\int n^1 = \tfrac{2}{3}n(n+1)$

Anm. zu No. 3 *und* 4. *Es bezeichne* ${}^1t_{n-1}$, ${}^1t_n$, ${}^1t_{n+1}$ *das* $(n-1)$*te*, n*te*, $(n+1)$*te Glied der natürlichen Zahlenreihe* 1, 2, 3, ...

6. $\int n^7 + \int n^5 = 2(\int n^3)^2 = 2(\int n^1)^4$

7. $\int n^1 + \int n^3 + \int n^5 + \int n^7 = \int n^1 + (\int n^1)^2 + 2(\int n^1)^4$
$= \tfrac{1}{2}n(n+1)\{1 + \tfrac{1}{2}n(n+1)[1 + 1(\tfrac{1}{2}n(n+1))^2]\}$

8. $\int n^7 + \int n^5 - 2\int n^3 = 2(\int n^3 + \int n^1)(\int n^3 - \int n^1) = 2\int n^3(\int n^1 + 1)(\int n^1 - 1)$

9. $\dfrac{\int n^7 + \int n^5}{2\int n^3} = (\int n^1 + 1)(\int n^1 - 1) + 1$ 10. $\dfrac{\int n^7 + \int n^5}{\int n^3} = 2(\int n^1)^2$

11. $3(\int n^5 - \int n^4) = 8\int n^3 \,.\, \int n^2 \,.\, (\int n^1 - 1)$.

Anmerkung. *Zur Berechnung von* $\int n^r$ *ist nach der Methode dieses* §. *erforderlich, dass man die summatorischen Glieder aller vorhergehenden Reihen* $\int n^1$, $\int n^2$, ... *bis* $\int n^{r-1}$ *kenne. Aus Zus.* **1** *zu* §. **13** *erhellet, wie man* $\int n^r$ *für jedes* r *unabhängig von den vorhergehenden Reihen finden kann.*

§. **8.** ***Aufgabe.*** ***Das allgemeine Glied einer Reihe zu finden, welche durch Multiplikation der gleichnamigen Glieder beliebig vieler arithmetischen Reihen erster Ordnung entstanden ist.***

Wenn z. B. die Reihen 2, 3, 4, 5, 6, ...
4, 6, 8, 10, 12, ...
5, 8, 11, 14, 17, ...

multiplicirt werden, so erhält man die Reihe

2 . 4 . 5, 3 . 6 . 8, 4 . 8 . 11, 5 . 10 . 14, 6 . 12 . 17, ...

Auflösung. *Das allgemeine Glied einer solchen Reihe ist offenbar das Produkt der allgemeinen Glieder der einzelnen Reihen, durch deren Multiplikation die gegebene Reihe entstanden ist, und hat die Form*

$$t_n = (\alpha_1 n + \beta_1)(\alpha_2 n + \beta_2)(\alpha_3 n + \beta_3) \ldots$$

wo nach §. 6 *Zus. die Koeffizienten* α, β *in jedem einzelnen Falle aus* 2 *gegebenen Gliedern nebst deren Stellenzahlen bestimmt werden können.*

Beispiel. *Das 3te und 5te Glied einer Reihe sei* 4. 7. 8. 10, 6. 13. 12. 18, *so ist* . . .

$$3\alpha_1 + \beta_1 = 4,\quad 3\alpha_2 + \beta_2 = 7,\quad 3\alpha_3 + \beta_3 = 8,\quad 3\alpha_4 + \beta_4 = 10$$
$$5\alpha_1 + \beta_1 = 6,\quad 5\alpha_2 + \beta_2 = 13,\quad 5\alpha_3 + \beta_3 = 12,\quad 5\alpha_4 + \beta_4 = 18$$

also . . .

$$\alpha_1 = 1,\quad \alpha_2 = 3,\quad \alpha_3 = 2,\quad \alpha_4 = 4$$
$$\beta_1 = 1,\quad \beta_2 = -2,\quad \beta_3 = 2,\quad \beta_4 = -2$$

folglich $t_n = (n+1)(3n-2)(2n+2)(4n-2)$, *und die Reihe ist:*

2. 1. 4. 2, 3. 4. 6. 6, 4. 7. 8. 10, 5. 10. 10. 14, 6. 13. 12. 18, 7. 16. 14. 22, ...

§. 9. *Aufgabe.* *Das summatorische Glied einer Reihe zu finden, welche durch Multiplikation mehrerer arithmetischer Reihen erster Ordnung entstanden ist.*

Auflösung. *Das allgemeine Glied einer solchen Reihe ist*

$$t_n = (\alpha_1 n + \beta_1)(\alpha_2 n + \beta_2)(\alpha_3 n + \beta_3) \ldots (\alpha_p n + \beta_p)$$
$$= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_p \cdot \left(n + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)\left(n + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)\left(n + \frac{\beta_3}{\alpha_3}\right) \ldots \left(n + \frac{\beta_p}{\alpha_p}\right)$$

Ist nun die Anzahl der Faktoren = p *und bezeichnet für die* p *Elemente*

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1},\ \frac{\beta_2}{\alpha_2},\ \frac{\beta_3}{\alpha_3},\ \ldots\ \frac{\beta_p}{\alpha_p}$$

C_1 *die Summe ihrer Unionen,* C_2 *die Summe der Binionen,* .... C_p *die Summe der* p*-tionen, so ist nach dem Gesetze der Binomischen Faktoren*

$$t_n = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_p \left\{ n^p + C_1 n^{p-1} + C_2 n^{p-2} + \ldots + C_p \right\}$$

also

$$\int t_n = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_p \left\{ \int n^p + C_1 \int n^{p-1} + C_2 \int n^{p-2} + \ldots + nC_p \right\}$$

nach §. 2, 4, 1. *Zus.* 2, *wo in jedem speziellen Falle für* $\int n^p$, $\int n^{p-1}$, ... *die Werthe aus* §. 7 *gesetzt werden können.*

Beispiel 1. *Gegeben sei die Reihe in dem Beispiele zu* §. 8, *so ist*

$$p = 4,\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = 24,\ \frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1,\ \frac{\beta_2}{\alpha_2} = -\tfrac{2}{3},\ \frac{\beta_3}{\alpha_3} = 1,\ \frac{\beta_4}{\alpha_4} = -\tfrac{1}{2}$$

$$C_1 = \tfrac{5}{6},\ C_2 = -1,\ C_3 = -\tfrac{1}{2},\ C_4 = \tfrac{1}{3}$$

Demnach

$$\int t_n = 24 \cdot \left\{ \int n^4 + \tfrac{5}{6} \int n^3 - \int n^2 - \tfrac{1}{2} \int n + \tfrac{n}{3} \right\}$$
$$= 24 \int n^4 + 20 \int n^3 - 24 \int n^2 - 12 \int n + 8n$$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
24 \int n^4 &= \tfrac{24}{5} n^5 + 12 n^4 + 8 n^3 - \tfrac{4}{5} n \\
20 \int n^3 &= \phantom{\tfrac{24}{5} n^5} + 5 n^4 + 10 n^3 + 5 n^2 \\
- 24 \int n^2 &= \phantom{\tfrac{24}{5} n^5 + 5 n^4} - 8 n^3 - 12 n^2 - 4 n \\
- 12 \int n &= \phantom{\tfrac{24}{5} n^5 + 5 n^4 - 8 n^3} - 6 n^2 - 6 n \\
8 n &= \phantom{\tfrac{24}{5} n^5 + 5 n^4 - 8 n^3 - 6 n^2} + 8 n \\
\hline
\int t_n &= \tfrac{24}{5} n^5 + 17 n^4 + 10 n^3 - 13 n^2 - \tfrac{14}{5} n
\end{aligned}
$$

Beispiel 2. Für die Reihe 2.5.8, 5.8.11, 8.11.14, ...
ist $t_n = (3n-1)(3n+2)(3n+5)$, $p = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 3$,

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = -\tfrac{1}{3},\ \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \tfrac{2}{3},\ \frac{\beta_3}{\alpha_3} = \tfrac{5}{3},\ C_1 = 2,\ C_2 = \tfrac{1}{3},\ C_3 = -\tfrac{10}{27}$$

Demnach $\int t_n = 27 (\int n^3 + 2 \int n^2 + \tfrac{1}{2} \int n - \tfrac{10}{27} n)$
$ = 27 \int n^3 + 54 \int n^2 + 9 \int n - 10 n$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
27 \int n^3 &= \tfrac{27}{4} n^4 + \tfrac{27}{2} n^3 + \tfrac{27}{4} n^2 \\
54 \int n^2 &= \phantom{\tfrac{27}{4} n^4} + 18 n^3 + 27 n^2 + 9 n \\
9 \int n &= \phantom{\tfrac{27}{4} n^4 + 18 n^3} + \tfrac{9}{2} n^2 + \tfrac{9}{2} n \\
- 10 n &= \phantom{\tfrac{27}{4} n^4 + 18 n^3 + \tfrac{9}{2} n^2} - 10 n \\
\hline
\int t_n &= \tfrac{27}{4} n^4 + \tfrac{63}{2} n^3 + \tfrac{153}{4} n^2 + \tfrac{7}{2} n
\end{aligned}
$$

Dieses letzte Beispiel gehört zu einer besonderen Klasse von Reihen, die sich einfacher behandeln lassen, wie wir im §. 10, 11 zeigen wollen.

§. 10. Aufgabe. Das allgemeine Glied einer Reihe zu finden, deren Glieder aus gleichvielen Faktoren bestehen, die einer und derselben Reihe erster Ordnung angehören und zwar so, dass der erste Faktor jedes Gliedes gleich ist dem zweiten Faktor des vorangehenden Gliedes.

Auflösung. Das allgemeine Glied hat nach §. 8 die Form

$$(\alpha_1 n + \beta_1)(\alpha_2 n + \beta_2)(\alpha_3 n + \beta_3) \ldots\ldots$$

Da nun diese Faktoren Glieder einer einzigen Reihe sind, so ist zuerst klar, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots$, *weil sonst die Differenz zweier auf einander folgenden Faktoren nicht konstant sein könnte, und* $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots$ *müssen eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden. Es ist also zuerst*

$$t_n = (\alpha n + \beta_1)(\alpha n + \beta_2)(\alpha n + \beta_3) \ldots$$

Da ferner der erste Faktor des n*ten Gliedes gleich ist dem zweiten Faktor des* (n—1) *ten Gliedes, so muss sein*

$$\alpha n + \beta_1 = \alpha(n-1) + \beta_2,\ \textit{also}\ \beta_2 = \beta_1 + \alpha$$

Die Grössen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ *bilden also eine arithmetische Reihe erster Ordnung, deren Differenz* $= \alpha$; *folglich ist, wenn die Zahl der Faktoren jedes Gliedes* $= p$ *ist,*

$t_n = (\alpha n + \beta)(\alpha n + \beta + \alpha)(\alpha n + \beta + 2\alpha) \ldots\ldots (\alpha n + \beta + (p-1)\alpha)$
wo in jedem speziellen Falle ein gegebenes Glied nebst seiner Stellenzahl zur Bestimmung von α *und* β *hinreicht.*

Wenn z. B. das 2te Glied 5. 8. 11. *ist, so ist* $2\alpha + \beta = 5$, $2\alpha + \beta + \alpha = 8$, *also* $\alpha = 3$, $\beta = -1$, $t_n = (3n-1)(3n+2)(3n+5)$

§. *11. Aufgabe. Das summatorische Glied einer Reihe, wie in* §. *10, zu finden.*

Auflösung. Bezeichnen wir das allgemeine Glied einer solchen Reihe durch

$$t_{p-1} = a_0 \,.\, a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots\ldots a_{p-1}$$

wo die Anzahl der Faktoren $= p$, *und*
$a_0 = \alpha n + \beta$, $a_1 = \alpha n + \beta + \alpha$, $a_2 = \alpha n + \beta + 2\alpha$, ... $a_{p-1} = \alpha n + \beta + (p-1)\alpha$, *so dass* $a_m = \alpha n + \beta + m\alpha$, $a_p = \alpha n + \beta + p\alpha$, $a_{-1} = \alpha n + \beta - \alpha$ *bedeute;*
Setzen wir ferner

$$a_0 \,.\, a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots\ldots a_{p-1} \,.\, a_p = A$$
$$a_{-1} \,.\, a_0 \,.\, a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots\ldots a_{p-1} = B$$

so ist $A - B = a_0 \,.\, a_1 \,.\, a_2 \ldots\ldots a_{p-1} \,.\, (a_p - a_{-1}) = t_{p-1} \,.\, (a_p - a_{-1})$
Nun ist $a_p - a_{-1} = (\alpha n + \beta + p\alpha) - (\alpha n + \beta - \alpha) = (p+1)\alpha$, *demnach* $A - B = (p+1)\alpha \,.\, t_{p-1}$ *und* $(p+1)\alpha \,.\, \int t_{p-1} = \int(A - B) = \int A - \int B$ (§. 3),
also

$$\int t_{p-1} = \frac{\int A - \int B}{(p+1)\alpha}$$

Da nun die Reihen, deren allgemeine Glieder A *und* B *sind, in allen Gliedern mit Ausnahme des letzten von* A *und des ersten von* B *übereinstimmen, das letzte oder* n*te Glied der Reihe* A *aber* $= a_0 \,.\, a_1 \,.\, a_2 \ldots\, a_p = t_p$, *und das erste Glied der Reihe* $B = \beta(\beta + \alpha)(\beta + 2\alpha) \ldots (\beta + p\alpha)$ *ist, welches man erhält, wenn man in* B $n = 1$ *setzt, und welches wir durch* β_p *bezeichnen wollen, so ist*

$$\int t_{p-1} = \frac{t_p - \beta_p}{(p+1)\alpha}$$

Beispiel 1. Reihe: 8.13.18.23, 13.18.23.28, ... $(5n+3)(5n+8)(5n+13)(5n+18)$

$$\alpha = 5,\ \beta = 3,\ p = 4,\ \beta_p = 3.8.13.18.23$$

$$\int t_{p-1} = \frac{(5n+3)(5n+8)(5n+13)(5n+18)(5n+23) - 3.8.13.18.23}{25}$$

Beispiel 2. Reihe: 2.5.8, 5.8.11, 8.11.14, ... $(3n-1)(3n+2)(3n+5)$

$$\alpha = 3,\ \beta = -1,\ p = 3,\ \beta_p = -1.2.5.8$$

$$\int t_{p-1} = \frac{(3n-1)(3n+2)(3n+5)(3n+8) + 1.2.5.8}{12}$$

Beispiel 3. *Reihe:* 2. 4. 6. 8, 4. 6. 8. 10, ... 2n (2n + 2) (2n + 4) (2n + 6)

$$\alpha = 2,\ \beta = 0,\ p = 4,\ \beta_p = 0$$

$$\int t_{p-1} = \frac{2n(2n+2)(2n+4)(2n+6)(2n+8)}{10} = \tfrac{16}{5}\, n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

Zusatz. *Geht* p *über in* p + 1 *u. s. w., so ist*

$$\int t_p = \frac{t_{p+1} - \beta_{p+1}}{(p+2)\alpha},\quad \int t_{p+1} = \frac{t_{p+2} - \beta_{p+2}}{(p+3)\alpha}\ \textit{u. s. w.}$$

Auch folgt

$$\int t_p - \int t_{p-1} = \frac{t_{p+1} - \beta_{p+1}}{(p+2)\alpha} - \frac{t_p - \beta_p}{(p+1)\alpha} = t_p \left\{ \frac{a_{p+1}}{(p+2)\alpha} - \frac{1}{(p+1)\alpha} \right\} - \beta_p \left\{ \frac{\beta + (p+1)\alpha}{(p+2)\alpha} - \frac{1}{(p+1)\alpha} \right\}$$

und für beliebige konstante Zahlen A, B

$$A\int t_p - B\int t_{p-1} = t_p \left\{ \frac{A\,a_{p+1}}{(p+2)\alpha} - \frac{B}{(p+1)\alpha} \right\} - \beta_p \left\{ \frac{A\,[\beta + (p+1)\alpha]}{(p+2)\alpha} - \frac{B}{(p+1)\alpha} \right\}$$

§. ***12.*** ***Aufgabe.*** *Das summatorische Glied einer Reihe zu finden, deren allgemeines Glied der Bedingung des* §. ***10*** *entspricht und ausserdem einen Faktor enthält, welcher die Summe aller Faktoren des Gliedes ist.*

Auflösung. *Bezeichnen wir das allgemeine Glied durch* t^{+}_{p-1}, *so ist*

$$t^{+}_{p-1} = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots a_{p-1} \cdot (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1}) = t_{p-1} \cdot (a_0 + a_1 + \ldots + a_{p-1})$$

Nun ist nach §. ***6*** $a_0 + a_1 \ldots + a_{p-1} = \frac{1}{2} p (a_0 + a_{p-1}) = p \cdot \alpha n + p(\beta + \frac{p-1}{2}\alpha)$

also $t^{+}_{p-1} = p \cdot t_{p-1} \cdot (\alpha n + \beta + \frac{p-1}{2}\alpha)$

Addire $\frac{1}{2} p (p+1)\alpha \cdot t_{p-1} = p \cdot t_{p-1} \cdot \frac{p+1}{2}\alpha$, *so ist*

$$t^{+}_{p-1} + \tfrac{1}{2} p (p+1)\alpha \cdot t_{p-1} = p \cdot t_{p-1} (\alpha n + \beta + p\alpha) = p \cdot t_p,$$

folglich $t^{+}_{p-1} = p \cdot t_p - \frac{1}{2} p (p+1) \alpha \cdot t_{p-1}$ *und* $\int t^{+}_{p-1} = p \int t_p - \frac{1}{2} p (p+1) \alpha \cdot \int t_{p-1}$, *wo nach* §. ***11.*** *Zus. die gesuchte Summe gefunden wird, wenn* $p = A$ *und* $\frac{1}{2} p (p+1)\alpha = B$ *gesetzt wird.*

Beispiel 1. *Reihe:* 1. 3. 4, 3. 5. 8, 5. 7. 12, ... (2n − 1) (2n + 1) . 4n

$$\alpha = 2,\ \beta = -1,\ p = 2,\ \beta_p = -1 \cdot 1 \cdot 3,\ A = 2,\ B = 6$$

$$\int t^{+}_{p-1} = 2\int t_p - 6\int t_{p-1}$$

$$= (2n-1)(2n+1)(2n+3) \left\{ \frac{2n+5}{4} - 1 \right\} + 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \left\{ \frac{5}{4} - 1 \right\}$$

$$= (2n-1)(2n+1)(2n+3) \cdot \frac{2n+1}{4} + \frac{3}{4}$$

Beispiel 2. *Reihe:* 2 . 3 . 4 . 9, 3 . 4 . 5 . 12, ... (n+1) (n+2) (n+3) (3n+6)

$$\alpha = 1,\ \beta = 1,\ p = 3,\ \beta_p = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4,\ A = 3,\ B = 6.$$

$$\int t^{+}_{p-1} = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\left\{\frac{3(n+5)}{5} - \frac{6}{4}\right\} - 1.2.3.4\left\{\frac{3.5}{5} - \frac{6}{4}\right\}$$

$$= 3\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,.\,\frac{2n+5}{10} - 36$$

Zusatz 1. Nach der Methode dieses §. lassen sich auch die Reihen summiren, deren allgemeines Glied ausser den nach §. 11 gebildeten Faktoren $a_0 . a_1 . a_2 \ldots . a_{p-1}$ *noch einen Faktor* a_x *von der Form* $\alpha n + \gamma$ *enthält. In diesem Falle lässt sich zu dem allgemeinen Gliede*

$$a_0 . a_1 . a_2 \ldots . a_{p-1} . a_x$$

welches wir durch t^{x}_{p-1} *bezeichnen wollen, die Funktion* $a_0 . a_1 . a_2 \ldots a_{p-1} . q$ *addiren, so dass* $a_x + q = a_p$ *wird. Da nämlich* $a_p = \alpha n + \beta + p\alpha$ *und* $a_x + q = \alpha n + \gamma + q$, *so ist* $q = \beta + p\alpha - \gamma$, *mithin* q *bekannt und eine konstante Zahl. Man hat also*

$$t^{x}_{p-1} + q . t_{p-1} = t_{p-1} . (a_x + q) = t_{p-1} . a_p = t_p$$

mithin $t^{x}_{p-1} = t_p - q . t_{p-1}$ *und* $\int t^{x}_{p-1} = \int t_p - q . \int t_{p-1}$, *also nach §. 11. Zus.*

$$\int t^{x}_{p-1} = t_p\left(\frac{a_{p+1}}{(p+2)\alpha} - \frac{q}{(p+1)\alpha}\right) - \beta_p\left(\frac{\beta + (p+1)\alpha}{(p+2)\alpha} - \frac{q}{(p+1)\alpha}\right)$$

Beispiel. Reihe: 5.7.9.1, 7.9.11.3, ... (2n+3) (2n+5) (2n+7) (2n−1)

$$\alpha = 2,\ \beta = 3,\ p = 3,\ \gamma = -1,\ q = \beta + p\alpha - \gamma = 10,\ \beta_p = 3.5.7.9$$

$$\int t^{x}_{p-1} = (2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)\,.\left(\frac{2n+11}{10} - \frac{5}{4}\right) - 3.5.7.9\left(\frac{11}{10} - \frac{5}{4}\right)$$

$$= (2n+3)\,(2n+5)\,(2n+7)\,(2n+9)\,.\,\frac{4n-3}{20} + \frac{567}{4}$$

Zusatz 2. Nach derselben Methode lassen sich die Reihen summiren, in deren allgemeinem Gliede ein Faktor a_m *auf die 2te Potenz erhoben ist. Bezeichnen wir dasselbe durch* ${}^2t_{p-1}$, *so ist*

$${}^2t_{p-1} = a_0 . a_1 . a_2 \ldots a_m^2 \ldots . a_{p-1} = t_{p-1} . a_m$$

wo $a_m = \alpha n + \beta + m\alpha$. *Man hat also statt* a_x *des vorigen Zusatzes* a_m *und statt* γ *zu setzen* $\beta + m\alpha$, *mithin*

$$q = \beta + p\alpha - (\beta + m\alpha) = (p-m)\,\alpha,$$

also

$${}^2t_{p-1} = t_p - (p-m)\,\alpha\,.\,t_{p-1}$$

$$\int {}^2t_{p-1} = \int t_p - (p-m)\,\alpha\,.\int t_{p-1}$$

$$= t_p\,.\left(\frac{a_{p+1}}{(p+2)\alpha} - \frac{p-m}{p+1}\right) - \beta_p\,.\left(\frac{\beta + (p+1)\alpha}{(p+2)\alpha} - \frac{p-m}{p+1}\right)$$

Beispiel. Reihe: $2.5^2.8,\ 5.8^2.11,\ \ldots\ (3n-1)\,(3n+2)^2\,(3n+5)$

$$\alpha = 3,\ \beta = -1,\ p = 3,\ m = 1,\ \beta_p = -1.2.5.8$$

$$\int {}^2t_{p-1} = (3n-1)(3n+2)(3n+5)(3n+8).\left(\frac{3n+11}{15}-\frac{1}{2}\right)+1.2.5.8.\left\{\frac{11}{15}-\frac{1}{2}\right\}$$
$$= (3n-1)(3n+2)(3n+5)(3n+8).\frac{6n+7}{30}+\frac{56}{3}$$

Wir wollen jetzt die Aufgabe des **2ten** *Zusatzes allgemein behandeln.*

§. **13.** *Aufgabe. Das summatorische Glied einer Reihe zu finden, deren allgemeines Glied den Bedingungen des* §. **10** *entspricht, wenn ausserdem einer der Faktoren* a_m *auf die* $(r+1)$ *te Potenz erhoben ist.*

Auflösung. Bezeichnen wir das allgemeine Glied durch ${}^{r+1}t_{p-1}$, *so ist*

$${}^{r+1}t_{p-1} = a_0 . a_1 . a_2 \ldots . a_m^{r+1} \ldots\ldots a_{p-1}$$

Eben so ist
$${}^{r}t_{p} = a_0 . a_1 . a_2 \ldots . a_m^{r} \ldots\ldots a_{p-1} . a_p$$

also
$${}^{r}t_{p} - {}^{r+1}t_{p-1} = a_0 . a_1 . a_2 \ldots . a_m \ldots . a_{p-1} . (a_p - a_m) = {}^{r}t_{p-1} . (a_p - a_m)$$

Nun ist $a_p - a_m = (\alpha n + \beta + p\alpha) - (\alpha n + \beta + m\alpha) = \alpha\,(p-m)$, *also wenn* $\alpha\,(p-m) = A$ *gesetzt wird,*

$${}^{r}t_{p} - {}^{r+1}t_{p-1} = A . {}^{r}t_{p-1}$$

folglich
$${}^{r+1}t_{p-1} = {}^{r}t_{p} - A . {}^{r}t_{p-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\lambda)$$

Wendet man das Gesetz, welches diese Gleichung (λ) *enthält, auf ihr letztes Glied und so immerfort an, so erhält man*

$${}^{r+1}t_{p-1} = {}^{r}t_{p} - A\left\{{}^{r-1}t_{p} - A . {}^{r-1}t_{p-1}\right\} \textit{ wegen } \lambda$$
$$= {}^{r}t_{p} - A . {}^{r-1}t_{p} + A^2 . {}^{r-1}t_{p-1}$$
$$= {}^{r}t_{p} - A . {}^{r-1}t_{p} + A^2 . \left\{{}^{r-2}t_{p} - A . {}^{r-2}t_{p-1}\right\} \textit{ wegen } \lambda$$
$$= {}^{r}t_{p} - A . {}^{r-1}t_{p} + A^2 . {}^{r-2}t_{p} - A^3 . {}^{r-2}t_{p-1}$$
$$= {}^{r}t_{p} - A . {}^{r-1}t_{p} + A^2 . {}^{r-2}t_{p} - A^3 . \left\{{}^{r-3}t_{p} - A . {}^{r-3}t_{p-1}\right\} \textit{ wegen } \lambda$$
$$= {}^{r}t_{p} - A . {}^{r-1}t_{p} + A^2 . {}^{r-2}t_{p} - A^3 . {}^{r-3}t_{p} + A^4 . {}^{r-3}t_{p-1}$$

Das Bildungsgesetz dieser Reihe ist deutlich. Setzt man die Reduktion fort, bis der zweite Faktor des letzten Gliedes $= {}^{1}t_{p-1}$ *ist, so erhält man*

$${}^{r+1}t_{p-1} = {}^{r}t_{p} - A . {}^{r-1}t_{p} + A^2 . {}^{r-2}t_{p} - A^3 . {}^{r-3}t_{p} + \ldots \mp A^{r-1} . t_p \pm A^r . t_{p-1}$$

Die Zeichen wechseln regelmässig ab, daher hat das letzte Glied $+$ *für ein gerades* r, *und* $-$ *für ein ungerades* r. *Man findet also*

$${}^{2}t_{p-1} = t_p - A . t_{p-1}, \textit{ vergl. §. 12 Zus. 2.}$$
$${}^{3}t_{p-1} = {}^{2}t_{p} - A . t_p + A^2 . t_{p-1}$$
$${}^{4}t_{p-1} = {}^{3}t_{p} - A . {}^{2}t_{p} + A^2 . t_p - A^3 . t_{p-1}$$
$${}^{5}t_{p-1} = {}^{4}t_{p} - A . {}^{3}t_{p} + A^2 . {}^{2}t_{p} - A^3 . t_p + A^4 . t_{p-1} \textit{ u. s. w.}$$

Die Summation der Reihe $t_n = {}^{r+1}t_{p-1}$, *wo der Faktor* a_m *auf die* $(r+1)$*te Potenz erhoben ist, hängt hiernach ab von der Summation aller Reihen, welche* a_m *in den niedrigeren Potenzen bis zur ersten herab enthalten. Um diese Abhängigkeit zu vermeiden, setze man in den obigen Gleichungen für* ${}^2t_p$, ${}^3t_p$ *u. s. w. die Werthe aus den vorhergehenden Gleichungen. Aus der Entwickelung von* (λ) *aber erhellet, dass, wenn* p *übergeht*

$$\begin{aligned} &\textit{in } p+1, \textit{ auch } A \textit{ in } A_1 = \alpha\,(p+1-m) \quad \ldots\ldots \quad (\mu) \\ &\textit{in } p+2, \quad \ldots\ldots \quad A_2 = \alpha\,(p+2-m) \textit{ u. s. w.} \end{aligned}$$

übergehen müsse. Wir erhalten demnach

$$\begin{aligned}
{}^2t_{p-1} &= t_p - A\,.\,t_{p-1} \\
{}^3t_{p-1} &= {}^2t_p - A\,.\,t_p + A^2\,.\,t_{p-1} \\
&= t_{p+1} - A_1\,.\,t_p \\
&\qquad - A\,.\,t_p + A^2\,.\,t_{p-1} \\
&= t_{p+1} - (A + A_1)\,.\,t_p + A^2\,.\,t_{p-1} \\
{}^4t_{p-1} &= {}^3t_p - A\,.\,{}^2t_p + A^2\,.\,t_p - A^3\,.\,t_{p-1} \\
&= t_{p+2} - (A_1 + A_2)\,.\,t_{p+1} + A_1^2\,.\,t_p \\
&\qquad - \qquad A\,.\,(t_{p+1} - A_1\,.\,t_p) \\
&\qquad\qquad + A^2\,.\,t_p - A^3\,.\,t_{p-1} \\
&= t_{p+2} - (A + A_1 + A_2)\,.\,t_{p+1} + (A^2 + A A_1 + A_1^2)\,.\,t_p - A^3\,.\,t_{p-1} \\
{}^5t_{p-1} &= {}^4t_p - A\,.\,{}^3t_p + A^2\,.\,{}^2t_p - A^3\,.\,t_p + A^4\,.\,t_{p-1} \\
&= t_{p+3} - (A_1 + A_2 + A_3)\,.\,t_{p+2} + (A_1^2 + A_1 A_2 + A_2^2)\,.\,t_{p+1} - A_1^3\,.\,t_p \\
&\qquad - \qquad A\,.\,t_{p+2} + A\,(A_1 + A_2)\,.\,t_{p+1} - A A_1^2\,.\,t_p \\
&\qquad\qquad + \qquad A^2\,.\,t_{p+1} - A^2 A_1\,.\,t_p \\
&\qquad\qquad\qquad - A^3\,.\,t_p + A^4\,.\,t_{p-1} \\
&= t_{p+3} - (A + A_1 + A_2 + A_3)\,.\,t_{p+2} + (A^2 + A A_1 + A A_2 + A_1^2 + A_1 A_2 + A_2^2)\,.\,t_{p+1} \\
&\qquad - (A^3 + A^2 A_1 + A A_1^2 + A_1^3)\,.\,t_p + A^4\,.\,t_{p-1}
\end{aligned}$$

Das Gesetz, nach welchem diese Formeln fortschreiten, ist einleuchtend. Bezeichnet man die ***Kombinationen mit Wiederholungen*** *in der*

1*ten Kl. aus den* r *Elem.* $A, A_1, A_2, \ldots A_{r-3}, A_{r-2}, A_{r-1}$ *durch* $\overset{r}{K}_1$

2*ten Kl.* . . . . $r-1$ . . . $A, A_1, A_2, \ldots A_{r-3}, A_{r-2}$ . . . $\overset{r-1}{K}_2$

⋮

$(r-2)$*ten Kl.* . . . . 3 . . . A, A_1, A_2 . . . $\overset{3}{K}_{r-2}$

(r—1)*ten Kl. aus den* 2 *Elem.* A, A_1 *durch* $\overset{2}{K}_{r-1}$

r *ten Kl.* . . . . . 1 . . . . A . . . . $\overset{1}{K}_r$

so hat man

$$^{r+1}t_{p-1} = t_{p+r-1} - \overset{r}{K}_1 . t_{p+r-2} + \overset{r-1}{K}_2 . t_{p+r-3} - \ldots \mp \overset{2}{K}_{r-1} . t_p \pm \overset{1}{K}_r . t_{p-1}$$

und folglich

$$\int^{r+1}t_{p-1} = \int t_{p+r-1} - \overset{r}{K}_1 . \int t_{p+r-2} + \overset{r-1}{K}_2 . \int t_{p+r-3} - \ldots \mp \overset{2}{K}_{r-1} . \int t_p \pm \overset{1}{K}_r . \int t_{p-1}$$

Die Vorzeichen der Glieder wechseln ab, und das letzte Glied ist für ein gerades r *positiv, für ein ungerades negativ.*

Beispiel. Reihe: $3 . 5 . 7^3, 5 . 7 . 9^3, \ldots (2n+1)(2n+3)(2n+5)^3$.

$$\alpha = 2,\ \beta = 1,\ p = 3,\ m = 2,\ r = 2$$

$$^3t_{p-1} = t_{p+1} - \overset{2}{K}_1 . t_p + \overset{1}{K}_2 . t_{p-1}$$

$$A = \alpha(p-m) = 2,\ A_1 = \alpha(p+1-m) = 4,\ \overset{2}{K}_1 = 6,\ \overset{1}{K}_2 = 4$$

$\int^3 t_{p-1} = \int t_{p+1} - 6 \int t_p + 4 \int t_{p-1}$, *also nach* §. *11*

$$= \tfrac{1}{12} . (2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)(2n+11) - \tfrac{1}{12} . 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11$$
$$- \tfrac{6}{10} . (2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9) + \tfrac{6}{10} . 1 . 3 . 5 . 7 . 9$$
$$+ \tfrac{4}{8} . (2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7) - \tfrac{4}{8} . 1 . 3 . 5 . 7$$
$$= (2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7) . \left(\frac{(2n+9)(2n+11)}{12} - \frac{3(2n+9)}{5} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1407}{4}$$

Zusatz 1. Die Aufgabe des §. *7 wird durch die vorstehende Aufgabe gelöst, wenn man* $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $p = 1$, $m = 0$ *setzt.*

Beispiel. Man finde $\int n^4$. *Hier ist* $t_{p-1} = n$,

$$\int n^4 = \int^4 t_{p-1} = \int t_{p+2} - \overset{3}{K}_1 . \int t_{p+1} + \overset{2}{K}_2 . \int t_p - \overset{1}{K}_3 . \int t_{p-1}$$

$$\alpha = 1, \beta = 0, p = 1, m = 0, r = 3, A = 1, A_1 = 2, A_2 = 3, \overset{3}{K}_1 = 6, \overset{2}{K}_2 = 7, \overset{1}{K}_3 = 1$$

$\int n^4 = \int t_{p+2} - 6 \int t_{p+1} + 7 \int t_p - \int t_{p-1}$, *also nach* §. *11*

$$= \tfrac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - \tfrac{6}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) + \tfrac{7}{3}n(n+1)(n+2) - \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Diese Formel nach den Potenzen von n *entwickelt giebt die Formel in* §. *7.*

Zusatz 2. Es kann nun auch die Summe einer Reihe gefunden werden, deren allgemeines Glied $a_0 . a_1 . a_2 \ldots a_m^{r+1} \ldots a_{p-1} . S$ *noch den Factor* S *als die Summe sämmtlicher Faktoren in der ersten Potenz enthält. Es ist*

$a_0 + a_1 + a_2 \dots + a_m \dots + a_{p-1} = p \cdot \alpha n + p \cdot (\beta + \frac{p-1}{2}\alpha)$. *Bezeichnen wir also das allgemeine Glied durch* ${}^{r+1}t^{\;+}_{p-1}$, *so ist*

$$ {}^{r+1}t^{\;+}_{p-1} = p \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \dots a_m^{r+1} \dots a_{p-1} \cdot (\alpha n + \beta + \tfrac{p-1}{2}\alpha) $$

Addire $\quad \frac{1}{2} p \cdot (p+1)\,\alpha \cdot {}^{r+1}t_{p-1} = p \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \dots a_m^{r+1} \dots a_{p-1} \cdot \frac{p+1}{2}\alpha$

so ist ... ${}^{r+1}t^{\;+}_{p-1} + \frac{1}{2} p \cdot (p+1)\alpha \cdot {}^{r+1}t_{p-1} = p \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \dots a_m^{r+1} \dots a_{p-1} \cdot (\alpha n + \beta + p\alpha)$

$$ = p \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \dots a_m^{r+1} \dots a_p = p \cdot {}^{r+1}t_p $$

$$ {}^{r+1}t^{\;+}_{p-1} = p \cdot {}^{r+1}t_p - \tfrac{1}{2} p \cdot (p+1)\,\alpha \cdot {}^{r+1}t_{p-1} $$

Da nun nach §. *13 die Summen der Reihen* ${}^{r+1}t_p$ *und* ${}^{r+1}t_{p-1}$ *gefunden werden können, so ist auch die Summe der gegebenen Reihe* ${}^{r+1}t^{\;+}_{p-1}$ *gefunden.*

Beispiel. *Reihe:* $1 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot 6,\ 2 \cdot 3 \cdot 4^4 \cdot 9, \dots n(n+1)(n+2)^4(3n+3)$

$$ \alpha = 1,\ \beta = 0,\ p = 3,\ m = 2,\ r = 3 $$

$$ {}^4t^{\;+}_{p-1} = 3 \cdot {}^4t_p - 6 \cdot {}^4t_{p-1} $$

$$ \int {}^4t^{\;+}_{p-1} = 3 \cdot \left(\int t_{p+3} - \overset{3}{K}_1 \cdot \int t_{p+2} + \overset{2}{K}_2 \cdot \int t_{p+1} - \overset{1}{K}_3 \cdot \int t_p\right) $$

$$ - 6 \cdot \left(\int t_{p+2} - \overset{3}{K}_1 \cdot \int t_{p+1} + \overset{2}{K}_2 \cdot \int t_p - \overset{1}{K}_3 \cdot \int t_{p-1}\right) $$

In der ersten Klammer ist aber $p-1$ *in* p *übergegangen, daher ist nach Gleichung* (μ) *Seite 15*

$A = \alpha(p+1-m) = 2,\ A_1 = \alpha(p+2-m) = 3,\ A_2 = \alpha(p+3-m) = 4;\ K_1 = 9,\ K_2 = 19,\ K_3 = 8.$

In der zweiten Klammer ist $A = \alpha(p-m) = 1,\ A_1 = 2,\ A_2 = 3;\ K_1 = 6,\ K_2 = 7,\ K_3 = 1$

also $\int {}^4t^{\;+}_{p-1} = 3 \cdot (\int t_{p+3} - 9 \int t_{p+2} + 19 \int t_{p+1} - 8 \int t_p)$

$$ - 6 \cdot (\int t_{p+2} - 6 \int t_{p+1} + 7 \int t_p - \int t_{p-1}) $$

$$ = 3 \cdot (\int t_{p+3} - 11 \int t_{p+2} + 31 \int t_{p+1} - 22 \int t_p + 2 \int t_{p-1}) $$

$$ = 3 \cdot n(n+1)(n+2)(n+3)\left\{\tfrac{1}{8}(n+4)(n+5)(n+6)(n+7) - \tfrac{11}{7}(n+4)(n+5)(n+6) + \tfrac{31}{6}(n+4)(n+5) - \tfrac{22}{5}(n+4) + \tfrac{2}{4}\right\} $$

§. **14.** **Aufgabe.** *Das allgemeine Glied einer Reihe zu finden, deren jedes Glied aus* $m+1$ *Faktoren besteht, von denen die* m *ersten Faktoren Glieder einer arithm. Reihe mit der konstanten Differenz* $= d$, *der letzte oder* $(m+1)$*te aber die Summe der vorhergehenden* m *Faktoren und zugleich der erste Faktor des folgenden Gliedes ist.*

Auflösung. *Irgend ein Glied der Reihe sei*

$$ x(x+d)(x+2d)(x+3d) \dots (x+(m-1)d) \cdot S $$

so ist $S = mx + \frac{1}{2}dm(m-1)$. *Da* S *zugleich der erste Faktor des folgenden Gliedes ist, so findet man den ersten Faktor jedes Gliedes, wenn man den ersten Faktor des vorhergehenden Gliedes mit* m *multiplicirt und* $\frac{1}{2}dm(m-1)$ *addirt. Setzt man also den ersten Faktor des*

1. *Gliedes* $= a$, *so ist der erste Faktor des*
2. » $= ma + \frac{1}{2}dm(m-1)$
3. » $= m^2a + \frac{1}{2}dm^2(m-1) + \frac{1}{2}dm(m-1)$
4. » $= m^3a + \frac{1}{2}dm^3(m-1) + \frac{1}{2}dm^2(m-1) + \frac{1}{2}dm(m-1)$

⋮

n. » $= m^{n-1}a + \frac{1}{2}dm^{n-1}(m-1) + \frac{1}{2}dm^{n-2}(m-1) + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2}dm(m-1)$

$$= m^{n-1}a + \frac{1}{2}dm(m-1)\{m^{n-2} + m^{n-3} + m^{n-4}\ldots + m + 1\}$$

$$= m^{n-1}a + \frac{1}{2}dm(m-1) \cdot \frac{m^{n-1}-1}{m-1}$$

$$= m^{n-1}a + \frac{1}{2}dm(m^{n-1}-1) = (a + \frac{1}{2}dm) \cdot m^{n-1} - d \cdot \frac{1}{2}m$$

Es sei nun $a + \frac{1}{2}dm = \alpha$, *so besteht das allgemeine Glied* t_n *aus folgenden Faktoren:*

1^r *F.*	$\alpha m^{n-1} - d \cdot \frac{1}{2}m$	$= \alpha m^{n-1} - d \cdot \frac{1}{2}m$
2^r *F.*	$\alpha m^{n-1} - d \cdot \frac{1}{2}m + d$	$= \alpha m^{n-1} - d(\frac{1}{2}m - 1)$
3^r *F.*	$\alpha m^{n-1} - d \cdot \frac{1}{2}m + 2d$	$= \alpha m^{n-1} - d(\frac{1}{2}m - 2)$
⋮		
m^r *F.*	$\alpha m^{n-1} - d \cdot \frac{1}{2}m + (m-1)d$	$= \alpha m^{n-1} - d(\frac{1}{2}m - (m-1))$
$(m+1)^r$ *F.*	$m \cdot \alpha m^{n-1} - d \cdot \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}dm(m-1)$	$= m \cdot \alpha m^{n-1} - d \cdot \frac{1}{2}m$
		$= m \cdot (\alpha m^{n-1} - \frac{1}{2}d)$

Beispiel 1. Reihe: 2.3.5, 5.6.11, 11.12.23, 23.24.47, ...

$$a = 2,\ d = 1,\ m = 2,\ \alpha = a + \tfrac{1}{2}dm = 3,$$

$$t_n = (3 \cdot 2^{n-1} - 1) \cdot (3 \cdot 2^{n-1}) \cdot (3 \cdot 2^n - 1)$$

Beispiel 2. Reihe: 2.5.8.11.26, 26.29.32.35.122, 122.125.128.131.506, ...

$$a = 2,\ d = 3,\ m = 4,\ \alpha = a + \tfrac{1}{2}dm = 8$$

$$t_n = (8 \cdot 4^{n-1} - 6)(8 \cdot 4^{n-1} - 3)(8 \cdot 4^{n-1})(8 \cdot 4^{n-1} + 3)(8 \cdot 4^n - 6)$$

§. 15. *Aufgabe. Das summatorische Glied der Reihe des vorigen §. zu finden.*

Auflösung. Man setze in dem allgemeinen Gliede des vorigen §. die zweiten Theile der Faktoren $= b_0, b_1, b_2 \ldots\ldots b_{m-1}, b_m$, *so dass* $b_0 = d \cdot \frac{1}{2}m$, $b_1 = d(\frac{1}{2}m - 1)$, $b_2 = d(\frac{1}{2}m - 2)$, ... $b_{m-1} = d(\frac{1}{2}m - (m-1))$, $b_m = \frac{1}{2}d$, *so ist*

$$t_n = (\alpha m^{n-1} - b_0)(\alpha m^{n-1} - b_1)(\alpha m^{n-1} - b_2)\ldots\ldots(\alpha m^{n-1} - b_{m-1}) \cdot m \cdot (\alpha m^{n-1} - b_m)$$

Das allgemeine Glied ist also das m*fache Produkt von* $m+1$ *Binomischen Faktoren, deren gemeinsamer Theil* $= \alpha m^{n-1}$, *und deren zweite Theile* $= b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots$ *sind. Führt man die Multiplikation aus und bezeichnet durch* C_1 *die Summe der Unionen, durch* C_2 *die Summe der Binionen u. s. w. aus diesen zweiten Theilen, so erhält man*

$$t_n = m\left(\alpha^{m+1} m^{(n-1)(m+1)} + C_1 \alpha^m m^{(n-1)m} + C_2 \alpha^{m-1} m^{(n-1)(m-1)} + \ldots + C_m \alpha m^{n-1} + C_{m+1}\right)$$

und $\int t_n = m\left(\alpha^{m+1} . \int m^{(n-1)(m+1)} + C_1 \alpha^m . \int m^{(n-1)m} + \ldots + C_m \alpha . \int m^{n-1} + \int C_{m+1}\right)$

das ist zufolge §. *5 Zus., und weil nach* §. *1 Zus. 2* $\int C_{m+1} = n . C_{m+1}$ *ist,*

$$\int t_n = m \left\{ \alpha^{m+1} . \frac{m^{n(m+1)}-1}{m^{m+1}-1} + C_1 \alpha^m . \frac{m^{nm}-1}{m^m-1} + C_2 \alpha^{m-1} . \frac{m^{n(m-1)}-1}{m^{m-1}-1} + \ldots \right.$$
$$\left. + C_m \alpha . \frac{m^n-1}{m-1} + n . C_{m+1} \right\}$$

Beispiel 1. *Reihe:* $2.3.5,\ 5.6.11,\ 11.12.23,\ 23.24.47,\ \ldots$

$a=2,\ d=1,\ m=2,\ \alpha=3,\ b_0=-1,\ b_1=0,\ b_2=-\frac{1}{2},$

$C_1 = -\frac{3}{2},\ C_2 = +\frac{1}{2},\ C_3 = 0$

$$\int t_n = 2 \left\{ 3^3 . \frac{2^{3n}-1}{2^3-1} - \frac{3}{2} . 3^2 . \frac{2^{2n}-1}{2^2-1} + \frac{1}{2} . 3 . \frac{2^n-1}{2-1} \right\}$$
$$= \frac{54}{7}(2^{3n}-1) - 9(2^{2n}-1) + 3(2^n-1)$$

Beispiel 2. *Reihe:* $2.5.8.11.26,\ 26.29.32.35.122,\ \ldots$

$a=2,\ d=3,\ m=4,\ \alpha=8,\ b_0=-6,\ b_1=-3,\ b_2=0,\ b_3=3,\ b_4=-\frac{3}{2},$

$C_1 = -\frac{15}{2},\ C_2 = 0,\ C_3 = \frac{135}{2},\ C_4 = -81,\ C_5 = 0$

$$\int t_n = 4 \left\{ 8^5 . \frac{4^{5n}-1}{4^5-1} - \frac{15}{2} . 8^4 . \frac{4^{4n}-1}{4^4-1} + \frac{135}{2} . 8^2 . \frac{4^{2n}-1}{4^2-1} - 81 . 8 . \frac{4^n-1}{4-1} \right\}$$

Schnellpressendruck von F. W. Neumann-Hartmann in Elbing.